Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux et idéaux - TD 1

1. Soit R un anneau. Montrer que les éléments 0_R et 1_R sont uniques. Montrer aussi que, pour tout $r \in R$, l'élément $-r$ est unique.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Il existe des entiers d, r uniques tels que $a = dn + r$ et $0 < r < n$. On appelle r le *reste* de la division euclidienne de a par n. Montrer que $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n)$ si et seulement si a et b ont le même reste de la division euclidienne par n. Dans ce cas, nous avons $[a] = [b] = [r]$ (ceci explique que $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$).

3. Montrer que $\mathbb{Z}_n$ est un anneau avec $[a] + [b] = [a + b]$ et $[a][b] = [ab]$.

4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z},\, i^2 = -1\}$ est un anneau.

5. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, est un anneau.

6. Si R_1, R_2 sont des anneaux, montrer qu'il existe une structure d'anneau sur $R_1 \times R_2$.

7. Montrer que l'ensemble $S = \{(a, a) \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

8. Montrer que l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,|\, a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

9. Si $f : R \to S$ est un homomorphisme d'anneaux, alors $f(0_R) = 0_S$ et $f(-r) = -f(r)$ pour tout $r \in R$.

10. Est-ce que l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a$ est un homomorphisme d'anneaux ?

11. Est-ce que l'application $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est un homomorphisme d'anneaux ?

12. Montrer que si $f : R \to S$ est un isomorphisme d'anneaux, l'application $f^{-1} : S \to R$, $f(r) \mapsto r$ est un isomorphisme d'anneaux.

13. Montrer que la composition des homomorphismes d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux. Montrer que cela n'est pas vrai pour la somme et le produit des homomorphismes.

14. Est-ce que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ sont isomorphes ?

15. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que :
(a) $\mathrm{Im} f$ est un sous-anneau de S.
(b) $\mathrm{Ker} f$ est un idéal de R.

16. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de S. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de R.

17. L'intersection d'une famille non-vide d'idéaux de R est un idéal de R. Est-ce que cela est vrai pour l'union?

18. Donner un exemple d'un sous-anneau de $\mathbb{Q}[x]$ qui n'est pas un idéal de $\mathbb{Q}[x]$.

19. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si m divise n, alors $(n) \subseteq (m)$.

20. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, et $I = (m, n)$ l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par m et n. Montrer que $(m, n) = (\mathrm{pgdc}(m, n))$ (utiliser le fait que $\mathrm{pgdc}(m, n) = am + bn$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$).

21. Montrer que l'idéal $(2, x)$ de $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.