Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux et idéaux - TD 3

1. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si S est intègre, montrer que $\mathrm{Ker}f$ est un idéal premier de R.

2. Soit R un anneau fini. Montrer que tout idéal premier de R est maximal.

3. Vrai ou faux (si vrai, il faut une preuve ; si faux, il faut un contre-exemple) ?
(a) L'idéal (x) est un idéal premier de $\mathbb{Q}[x]$;
(b) L'idéal (x) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$;
(c) L'idéal (x) est un idéal maximal de $\mathbb{Q}[x]$;
(d) L'idéal (x) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$.

4. Vrai ou faux (si vrai, il faut une preuve ; si faux, il faut un contre-exemple) ?
(a) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}$;
(b) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$;
(c) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$;
(d) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$;
(e) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$;
(f) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[i]$.

5. Montrer que $(x, 2)$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$.

6. Soient I, J des idéaux de R tels que $I \subseteq J$. Montrer que :
(a) l'idéal J/I de R/I est premier si et seulement si J est premier ;
(b) l'idéal J/I de R/I est maximal si et seulement si J est maximal .

7. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$ ($f(x) \neq 0$ et $\deg f(x) \geq 1$). Montrer que l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est premier si et seulement si $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.

8. Soit k un corps et soient $f(x), g(x) \in k[x]$ avec $g(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $q(x), r(x) \in k[x]$ tels que
(i) $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, et
(ii) $r(x) = 0$ ou $\deg r(x) < \deg g(x)$.
De plus, $q(x)$ et $r(x)$ sont uniques *(indication: récurrence sur* $\deg f$*)*.