Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Factorisation dans des anneaux intègres - TD 4

1. Soit k un corps. Montrer que l'anneau $k[x]$ est principal.

2. Soit R un anneau. La relation $\sim$ dans R définie par

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ sont associés}$$

est une relation d'équivalence.

3. Montrer que 5 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

4. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ n'est pas factoriel.

5. Soit R un anneau intègre et $p \in R$, $p \neq 0$ et p non-inversible. L'élément p s'appelle *premier* si : $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$. Montrer que :

(i) tout élément premier est irréductible ;

(ii) si R est principal, alors tout élément irréductible est premier.

6. Un anneau intègre R est factoriel si et seulement si

(i) la condition (i) de la définition est vraie ;

(ii) tout élément irréductible est premier.

7. Soit R un anneau principal et $p \in R$, $p \neq 0$. Montrer que es propositions suivantes sont équivalents :

(1) p est premier ;

(2) p est irréductible ;

(3) $R/(p)$ est un corps ;

(4) $R/(p)$ est intègre.

8. Soit R un anneau principal, S un anneau intègre et $f : R \to S$ un épimorphisme. Montrer que soit f est un isomorphisme soit S est un corps.

9. Montrer que $R[x]$ est principal si et seulement si R est un corps.

10. Donner un exemple d'un $p \in R$ tel que p est irréductible et (p) n'est pas maximal.

11. Trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i) \cong \mathbb{Z}_m$.