Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Extensions de corps - TD 6

Si F est un corps, nous écrirons $|F|$ pour la cardinalité de F.

1. Soit E/F et $a \in E$. Montrer que
$$F(a) = \left\{ \frac{f(a)}{g(a)} \mid f(x), g(x) \in F[x],\, g(a) \neq 0 \right\}.$$

2. Soit E/F et $a \in E$. Montrer que $\mathrm{Frac}(F[a]) = F(a)$.

3. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

4. Si E/F, alors E est un F-espace vectoriel.

5. Soit E/F. Nous avons $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$.

6. Soient $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ des corps, avec $n \geq 3$. Montrer que
$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$

7. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $[K : F] = p$, où p est un nombre premier. Dans ce cas, soit $K = E$ soit $E = F$. De plus, K est une extension simple de F.

8. Si F est un corps fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|F| = p^n$, où $p = \mathrm{car}\, F$.

9. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

10. Si $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, alors $\sqrt{q}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

11. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité, alors z est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

12. Montrer que $\mathbb{Q}(i)$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.