Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2016/2017**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Homomorphismes d'anneaux et sous-anneaux - TD 2

1. Montrer que la composition des homomorphismes d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux.

2. Montrer que si $f : R \to S$ est un isomorphisme d'anneaux, l'application $f^{-1} : S \to R$, $f(r) \mapsto r$ est un isomorphisme d'anneaux.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$, $p(x) \mapsto p(z)$ est un homomorphisme d'anneaux. Est-ce que f est un monomorphisme ? Est-ce que f est un épimorphisme ?

4. Est-ce que l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a$ est un homomorphisme d'anneaux ?

5. Est-ce que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ sont isomorphes ?

6. Si S_1, S_2 sont des sous-anneaux d'un anneau R, montrer que $S_1 \cap S_2$ est aussi un sous-anneau de R.

7. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

8. Montrer que l'ensemble $S = \{(a, a) \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

9. Montrer que l'ensemble $S = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \,|\, \deg(f) \leqslant 5\} \cup \{0\}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{C}[x]$.

10. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que :
(a) $\mathrm{Im} f$ est un sous-anneau de S.
(b) $\mathrm{Ker} f$ est un idéal de R.