Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2016/2017**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux intègres et corps, idéaux premiers et maximaux - TD 4

1. Pour les idéaux principaux $I = (m)$ et $J = (n)$ de $\mathbb{Z}$ (avec $mn \neq 0$), calculer les idéaux $I \cap J$, $I + J$ et IJ.

2. Soit k un corps, et soient a, b deux éléments distincts de k. Montrer que

$$k[x]/(x-a)(x-b) \cong k[x]/(x-a) \times k[x]/(x-b) \cong k^2.$$

Par récurrence, si $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments distincts de k, alors

$$k[x]/(x-a_1)\cdots(x-a_n) \cong k^n.$$

3. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^4-1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$.

4. Montrer que le produit cartésien de deux anneaux n'est pas un anneau intègre. En déduire que $\mathbb{R}^2$ avec la structure d'anneau du produit cartésien n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$.

5. Montrer que R est un anneau intègre si et seulement si $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ pour tous $f, g \in R[x]$.

6. Montrer que si R est un anneau intègre, alors $R[x]$ est intègre. Si R est un corps, est-ce que $R[x]$ est un corps ?

7. Montrer que si R est un anneau intègre fini, alors R est un corps.

8. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R.

9. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors soit f est un monomorphisme, soit $f(r) = 0_S$ pour tout $r \in R$.

10. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il n'existe pas d'idéal I de $\mathbb{Z}$ tel que $(p) \subsetneq I \subsetneq \mathbb{Z}$.

11. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si S est intègre, montrer que $\mathrm{Ker} f$ est un idéal premier de R.

12. Vrai ou faux (si vrai, il faut une preuve ; si faux, il faut un contre-exemple) ?

(a) L'idéal (x) est un idéal premier de $\mathbb{Q}[x]$;
(b) L'idéal (x) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$;
(c) L'idéal (x) est un idéal maximal de $\mathbb{Q}[x]$;
(d) L'idéal (x) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$.

13. Vrai ou faux (si vrai, il faut une preuve ; si faux, il faut un contre-exemple) ?

(a) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}$;
(b) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$;
(c) L'idéal (2) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$;
(d) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$;
(e) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$;
(f) L'idéal (2) est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[i]$.