Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2016/2017**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux factoriels, corps des fractions et extensions de corps - TD 7

1. Montrer que 5 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

2. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel.

3. Soit R un anneau principal et $p \in R$, $p \neq 0$. L'élément p est irréductible si et seulement si l'idéal (p) est maximal.

4. Soit R un anneau intègre et $p \in R$, $p \neq 0$ et p non-inversible. L'élément p s'appelle *premier* si : $p|ab \Rightarrow p|a$ ou $p|b$. Montrer que :
(i) tout élément premier est irréductible ;
(ii) si R est principal, alors tout élément irréductible est premier.

5. Un anneau intègre R est factoriel si et seulement si
(i) la condition sur l'existence d'une décomposition de la définition est vraie ;
(ii) tout élément irréductible est premier.

6. Soit R un anneau principal et $p \in R$, $p \neq 0$. Montrer que es propositions suivantes sont équivalents :
(1) p est premier ;
(2) p est irréductible ;
(3) $R/(p)$ est un corps ;
(4) $R/(p)$ est intègre.

7. Soit R un anneau principal, S un anneau intègre et $f : R \to S$ un épimorphisme. Montrer que soit f est un isomorphisme soit S est un corps.

8. Montrer que $R[x]$ est principal si et seulement si R est un corps.

9. Donner un exemple d'un $p \in R$ tel que p est irréductible et (p) n'est pas maximal.

10. Trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{Z}[i]/(1+3i) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

11. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[i]) = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$.

12. Soit E/F. Nous avons $[E : F] = 1 \Leftrightarrow E = F$.

13. Soient $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ des corps, avec $n \geq 3$. Montrer que

$$[F_n : F_1] = \prod_{i=1}^{n-1} [F_{i+1} : F_i].$$

14. Soient $F \subseteq E \subseteq K$ des corps tels que $[K : F] = p$, où p est un nombre premier. Dans ce cas, soit $K = E$ soit $E = F$. De plus, K est une extension simple de F.