Extensions algébriques de corps - TD 8

1. Soit K/F et $a, b \in K$. Montrer que $F(a,b) = F(a)(b) = F(b)(a)$.

2. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

3. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité, alors z est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

4. Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

5. Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

6. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}$.

7. Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

8. Décrire $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.

9. Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})]$.

10. Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3})]$.

11. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$.

12. Décrire $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Est-ce que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$? Montrer que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$.

13. Soit ω une racine cubique de l'unité. Décrire $\mathbb{Q}(\omega)$.

14. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\omega^3 = 1$. Est-ce que $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\omega\sqrt{2})$? Montrer que $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2})$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$.

15. Trouver une extension E de $\mathbb{Q}$ telle que $[E : \mathbb{Q}] = 15$.