

Anneaux - TD 1

1. Soit R un anneau. Montrer que $R[x]$ est un anneau, qui est commutatif si et seulement si R est commutatif.
2. Montrer que l'ensemble $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est un anneau non-commutatif.
3. Si R_1, R_2 sont des anneaux, montrer qu'il existe une structure d'anneau sur $R_1 \times R_2$.
4. Si S_1, S_2 sont des sous-anneaux d'un anneau R , montrer que $S_1 \cap S_2$ est aussi un sous-anneau de R .
5. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de \mathbb{C} .
6. Montrer que l'ensemble $S = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-anneau de \mathbb{C} .
7. Montrer que l'ensemble $S = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
8. Montrer que l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
9. Montrer que l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-anneau de $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
10. Montrer que l'ensemble $S = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg(f(x)) \leq 5\} \cup \{0\}$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{C}[x]$.
11. Soit R un anneau, et soient $f(x), g(x) \in R[x]$. Montrer que $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg(f(x)), \deg(g(x))\}$ et $\deg(f(x)g(x)) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.
12. Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Posons $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ sont des anneaux.
13. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.