Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2017/2018**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Théorème des restes chinois, anneaux intègres et corps - TD 4

1. Soient I, J des idéaux de R tels que $I \subseteq J$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} (R/I)/(J/I) & \to & R/J \\ (r+I)+(J/I) & \mapsto & r+J \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux ($2^{\grave{e}me}$ *Théorème d'isomorphismes d'anneaux*).

2. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il n'existe pas d'idéal I de $\mathbb{Z}$ tel que $(p) \subsetneq I \subsetneq \mathbb{Z}$.

3. Soit k un corps, et soient a, b deux éléments distincts de k. Montrer que

$$k[x]/(x-a)(x-b) \cong k[x]/(x-a) \times k[x]/(x-b) \cong k^2.$$

Par récurrence, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments distincts de k, alors

$$k[x]/(x-a_1)\cdots(x-a_n) \cong k^n.$$

4. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^4-1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$.

5. Montrer que $\mathbb{C}[x]/(x^4-1) \cong \mathbb{C}^4$.

6. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

7. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{R}^2$.

8. Montrer que R est un anneau intègre si et seulement si $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$ pour tous $f(x), g(x) \in R[x]$.

9. Montrer que si R est un anneau intègre, alors $R[x]$ est intègre. Si R est un corps, est-ce que $R[x]$ est un corps ?

10. Montrer que si R est un anneau intègre fini, alors R est un corps.

11. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R.

12. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors f est un monomorphisme.