Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Extensions algébriques de corps - TD 10

Nous rappelons que les racines du polynôme $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ sont les nombres complexes $e^{2k\pi i/n} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) i$ pour $k = 1, \ldots, n$.

1. Calculer $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $\mathbb{Q}(a)$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour :
- (i) $a = \sqrt{3}$.
- (ii) $a = \sqrt[3]{2}$.
- (iii) $a = \sqrt[4]{2}$.
- (iv) $a = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
- (v) $a = \sqrt{3} i$.
- (vi) $a = \sqrt{1 + \sqrt{6}}$.
- (vii) $a = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

2. Calculer $[\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $\mathbb{Q}(a, b)$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour :
- (i) $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}$.
- (ii) $a = \sqrt{3}$ et $b = i$.
- (iii) $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
- (iv) $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = i$.
- (v) $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
- (vi) $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = i$.
- (vii) $a = e^{2\pi i/3}$ et $b = \sqrt{2}$.
- (viii) $a = e^{2\pi i/3}$ et $b = i$.
- (ix) $a = \sqrt{3} i$ et $b = \sqrt{3}$.

3. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2}\sqrt{3})$.

4. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3})$.

5. Soit K/F et $a, b \in K$. Si a est algébrique sur F et b est algébrique sur $F(a)$, alors b est algébrique sur F.

6. Soient ρ_1, ρ_2 les racines d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[x]$. Montrer que $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2) = \mathbb{Q}(\rho_1)$ et calculer $[\mathbb{Q}(\rho_1) : \mathbb{Q}]$.

7. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f_m(x) := x^3 - m \in \mathbb{Q}[x]$. Soient a_m, b_m, $c_m \in \mathbb{C}$ les racines de $f_m(x)$, et soit $F_m := \mathbb{Q}(a_m, b_m, c_m)$.
- (i) Montrer que $F_1 = \mathbb{Q}(\omega)$ où $\omega := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$;
- (ii) Montrer que $[F_1 : \mathbb{Q}] = 2$;
- (iii) Calculer $[F_m : \mathbb{Q}]$ selon la valeur de m *(indication : il faut distinguer 2 cas)*. Dans chaque cas, donner une base de F_m comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

8. En utilisant le fait que $e^{2\pi i/9} = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) i$, déterminer le polynôme minimal de $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)) : \mathbb{Q}] = 3$.