

Anneaux principaux et éléments irréductibles - TD 7

1. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (1) l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est premier ;
 - (2) l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est maximal ;
 - (3) $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.
2. Calculer les idéaux suivants de $\mathbb{Q}[x]$ et déterminer s'ils sont premiers et/ou maximaux :
 $I_1 = (x - 1, x^2 + 1)$, $I_2 = (x - 1, x^2 - 1)$, $I_3 = (x - 1) \cap (x^2 + 1)$, $I_4 = (x - 1) \cap (x^2 - 1)$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas un anneau principal de 3 façons : trouver un idéal qui n'est pas principal, trouver un idéal premier qui n'est pas maximal et trouver un contre-exemple au théorème de Bezout.
4. Montrer que la division euclidienne ne marche pas dans $\mathbb{Z}[x]$ de 2 façons.
5. Soit R un anneau principal, S un anneau intègre et $f : R \rightarrow S$ un épimorphisme. Montrer que f est un isomorphisme ou S est un corps.
6. Montrer que $R[x]$ est principal si et seulement si R est un corps.
7. Un anneau R s'appelle *euclidien* si R est intègre et il existe une application $\varphi : R \setminus \{0_R\} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tous $a \in R$, $b \in R \setminus \{0_R\}$,
 - (i) si $a|b$, alors $\varphi(a) \leq \varphi(b)$;
 - (ii) il existe $q, r \in R$ tels que $a = bq + r$, et $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$.L'application φ s'appelle *stathme euclidien*. Montrer que tout anneau euclidien est principal.
8. * Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien pour le stathme $\varphi : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, $a+bi \mapsto a^2+b^2$.
9. Soit R un anneau. La relation \sim dans R définie par
$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ sont associés}$$
est une relation d'équivalence.
10. Soit R un anneau intègre et $p \in R$, $p \neq 0$ et p non-inversible. Si l'idéal (p) est premier, l'élément p est irréductible.
11. Montrer que 5 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ de 2 façons.
12. Un anneau intègre R est factoriel si et seulement si
 - (i) tout élément de R qui n'est pas zéro ou inversible s'exprime comme produit d'éléments irréductibles de R ;
 - (ii) si p est un élément irréductible de R , alors l'idéal (p) est premier.