Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2012/2013**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 2

1. Soient V, W des ensembles algébriques affines dans $\mathbb{A}_k^n$, avec $V \subseteq W$. Montrez que toute composante irréductible de V est contenu dans une certaine composante irréductible de W .

2. Soient F, $G \in k[X_1, \ldots, X_n]$.

(a) Si $n = 2$ et F, G n'ont pas de facteur en commun, alors $V(F, G) = V(F) \cap V(G)$ est un ensemble fini de points.

(b) Si $n = 2$ et F est un polynôme irréductible tel que $V(F)$ est infini, alors $I(V(F)) = (F)$ et $V(F)$ est irréductible.

(c) Si $n > 2$, (a) et (b) ne sont pas vrais en général.

3. Si k est un corps infini, alors les ensembles algébriques irréductibles de $\mathbb{A}_k^2$ sont : $\mathbb{A}_k^2$, $\emptyset$, points, et les ensembles algébriques irréductibles de la forme $V(F)$, où F est un polynôme irréductible et $V(F)$ est infini.

4. Soit $k = \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $I(V(X^2 + Y^2 + 1)) = (1)$.

(b) Montrer que tout sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ est de la forme $V(F)$ pour un certain $F \in \mathbb{R}[X, Y]$.

5. On suppose que k est **algébriquement clos** et que F est un polynôme dans $k[X, Y]$ qui n'est pas constant. Si $F = F_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ est la décomposition de F en facteurs irréductibles, alors $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ est la décomposition de $V(F)$ en composantes irréductibles et $I(V(F)) = (F_1 \cdots F_r)$ *(Nous verrons que cela est aussi vrai pour $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$).*

6. Trouver les composantes irréductibles de $V(Y^2 - XY - X^2Y + X^3)$ et de $V(X^3 + X - X^2Y - Y)$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, et aussi dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

7. Déterminer si les ensembles algébriques affines suivants sont irréductibles. Sinon, décomposez les en composantes irréductibles :

(a) $V(Y^2 - X^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(b) $V((Y - X)^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(c) $V(Y^4 - X^2, Y - X) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(d) $V(Y^4 - X^2, Y^4 - X^2Y^2 + XY^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

8. Montrer que $F = Y^2 + X^2(X - 1)^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$ est un polynôme irréductible, mais que $V(F)$ est réductible.