Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2012/2013**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 4

Soit k un corps algébriquement clos.

1. Dans les cas suivants construire un isomorphisme $\varphi : V \to W$ d'ensembles algébriques affines. Calculer sa réciproque et $\Gamma(\varphi)$.

(a) $V = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\} \subset \mathbb{A}_k^n$ et $W = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n)\} \subset \mathbb{A}_k^n$;

(b) $V = V(X - Y) \subset \mathbb{A}_k^2$ et $W = V(X + Y) \subset \mathbb{A}_k^2$;

(c) $V = \mathbb{A}_k^1$ et $W = V(X^r - Y) \subset \mathbb{A}_k^2$ où $r \in \mathbb{N}^*$;

(d) $V = \mathbb{A}_k^2$ et $W = V(Z - XY) \subset \mathbb{A}_k^3$.

2. Soient V, W des variétés algébriques affines. Si V et W sont isomorphes, alors $\dim(V) = \dim(W)$. En déduire que $V(X - Y) \subset \mathbb{A}_k^2$ et $V(X - Y) \subset \mathbb{A}_k^3$ ne sont pas des variétés algébriques affines isomorphes.

3. Soit $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme irréductible. Montrer que $V(F)$ est une variété algébrique affine de dimension $n - 1$.

4. Soient $F_1, F_2 \in k[X, Y]$ deux polynômes irréductibles tels que $(F_1) \neq (F_2)$. Montrer que $V(F_1, F_2)$ est une variété algébrique affine si et seulement si $|V(F_1, F_2)| \leq 1$.

5. Montrer que $V(X - Y, X - Z) \subset \mathbb{A}_k^3$ est une variété algébrique affine. Calculer sa dimension.

6. Trouver les points réguliers et les points singuliers des variétés algébriques affines suivantes :

(a) $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}_k^2$;

(b) $V = V(Y^2 - X^3 + 1) \subset \mathbb{A}_k^2$;

(c) $V = V(Y^2) \subset \mathbb{A}_k^2$;

(d) $V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\} \subset \mathbb{A}_k^3$.