Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2012/2013**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 5

Soit k un corps algébriquement clos.

1. Montrer que $I(V(X-Y, Y-Z)) = (X-Y, Y-Z)$.

2. Calculer $I(V(X-Y, X^2+Y^2))$ et $I(V(X^2+Y^2))$ dans $\mathbb{C}[X,Y]$ et dans $\mathbb{R}[X,Y]$.

3. Soit $V = V(Y^2 - X^2(X+1))$. Montrer que le morphisme $\varphi : \mathbb{A}_k^1 \to V$, $t \mapsto (t^2-1, t(t^2-1))$ est injectif et surjectif, sauf aux points ± 1.

4. Soit $\varphi : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^3$, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ et soit $C := \mathrm{Im}\varphi$. Montrer que $\Gamma(C)$ est isomorphe à $k[X]$.

5. Dans les cas suivants calculer une base de transcendance de $k(V)$ sur k. En déduire la dimension de V.

(a) $V = V(X^2 - Y^3) \subset \mathbb{A}_k^2$;

(b) $V = V(X-Y,\, X+Y) \subset \mathbb{A}_k^2$;

(c) $V = V(X-Y,\, Z) \subset \mathbb{A}_k^3$.

6. Soient $k \subset K \subset L$ des corps tels que $\mathrm{deg.tr_k K} = \mathrm{m}$ et $\mathrm{deg.tr}_K L = n$. Montrer que $\mathrm{deg.tr}_k L = n + m$.

7. Soit $F_1, \dots, F_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes. Si $V(F_1, \dots, F_r)$ est une variété algébrique affine, alors $\dim(V(F_1, \dots, F_r)) \geq n - r$.

8. Trouver $F_1, F_2, F_3 \in k[X,Y,Z]$ tels que $V(F_1, F_2, F_3)$ soit une variété algébrique affine avec $\dim(V(F_1, F_2, F_3)) = 0, 1, 2, 3$.

9. Trouver les points réguliers et les points singuliers des variétés algébriques affines suivantes :

(a) $V = V(X^d + Y^d - Z^d) \subset \mathbb{A}_k^3$, $d \in \mathbb{N}$;

(b) $V = V(Y^2 - XZ, Z^2 - YT) \subset \mathbb{A}_k^4$.

10. Soit R un anneau. On appelle S un ensemble multiplicatif de R si $s_1 s_2 \in S$ pour tous $s_1, s_2 \in S$. On suppose que $0 \notin S$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $R \times S$ par $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ s'il existe $t \in S$ tel que $t(r_1 s_2 - r_2 s_1) = 0$. On note par la fraction r/s la classe d'équivalence de (r, s). On appelle l'anneau $S^{-1}R := \{r/s \mid r \in R, s \in S\}$ *le localisé de R à S*. Les idéaux de $S^{-1}R$ sont de la forme $S^{-1}I$, où I est un idéal de R tel que $I \cap S = \emptyset$.

(a) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R. Montrer que $S := R - \mathfrak{p}$ est un ensemble multiplicatif de R. Soit $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$. Décrire les idéaux de $R_\mathfrak{p}$. Montrer que $R_\mathfrak{p}$ est un anneau local.

(b) Décrire $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}$ et ses idéaux.

(c) Montrer que $k[X,Y]_{(Y)} \cong k(X)[Y]$.