Courbes algébriques - TD 7

Soit k un corps algébriquement clos.

1. Soient F, $G \in k[X,Y]$. Si F, G n'ont pas de facteur en commun, alors $V(F,G)$ est un ensemble fini.

2. Soient V un ensemble algébrique affine et L une droite dans $\mathbb{A}^n_k$. Si $L \not\subseteq V$, alors $L \cap V$ est un ensemble fini.

3. Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des ensembles algébriques affines :

(a) $\{(t, \sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\{(t, e^t, e^{t/2}) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \,|\, t \in \mathbb{C}\}$.

4. Soient $d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ fixés. Montrer que l'ensemble $C = \{\, (t, t^{d_2}, \ldots, t^{d_n}) \,|\, t \in k \,\}$ est une courbe lisse de $\mathbb{A}^n_k$ de 4 façons.

5. Montrer que $C = V(Y^2 - X^2 + 1)$ est une courbe lisse de $\mathbb{A}^2_k$ de 4 façons.

6. Montrer que $C = V(Y^2 - X^2(X+1))$ n'est pas une courbe lisse de $\mathbb{A}^2_k$ de 4 façons. Trouver tous les points singuliers de C.

7. Soit $V = \mathbb{A}^1_k$.

(a) Calculer $\Gamma(V)$ et $k(V)$;

(b) Montrer que V est une courbe ;

(c) Pour tout $x \in V$, montrer que Γ_x est un anneau de valuation discrète et trouver une uniformisante ;

(d) Pour $x = 1$, calculer les valuations dans Γ_1 des éléments suivants : $X-1$, $X+1$, $(X-1)^3$, $X^3 - 1$;

(e) Montrer que l'anneau $\{F/G \in k(V) \,|\, \deg(G) \geq \deg(F)\}$ est aussi un anneau de valuation discrète, et trouver une uniformisante.

8. Soit A un anneau de valuation discrète et soit K son corps de fractions. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A.

(a) Montrer que si $z \in K \setminus A$, alors $z^{-1} \in \mathfrak{m}$;

(b) Soit $B \subset K$ un anneau de valuation discrète tel que B contient A et l'idéal maximal de B contient $\mathfrak{m}$. Montrer que $A = B$.