Université de Versailles - Saint Quentin | **Année 2013/2014**
M2 Algèbre Appliquée | **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 6

1. Soient $d_2, d_3, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ fixés. Montrer que l'ensemble $C = \{\, (t, t^{d_2}, \ldots, t^{d_n}) \mid t \in k \,\}$ est une courbe lisse de $\mathbb{A}^n$ de 4 façons.

2. Montrer que $Z(X^2 - Y, Y^2 - Z) \subset \mathbb{A}^3$ est une courbe lisse de 4 façons.

3. Soient C une courbe de $\mathbb{A}^2$ et $P \in C$. Montrer que :

(a) $C = Z(F)$ pour un certain $F \in k[X, Y]$ irréductible ;

(b) P est un point régulier si et seulement si $\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = 1$;

(c) P est un point singulier si et seulement si $\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2) = 2$.

4. Trouver les points singuliers de $Z(Y^2Z - X(X - Z)(X - \lambda Z)) \subseteq \mathbb{P}^2$ suivant $\lambda \in k$.

5. Soit $C = Z(X^3 - Y^2Z) \subset \mathbb{P}^2$. Montrer que :

(a) C est une courbe ;

(b) $\varphi : C \to \mathbb{P}^1$, $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ n'est pas une application régulière ;

(c) C n'est pas lisse ;

(d) $(0 : 0 : 1)$ est un point singulier de C ;

(e) $(0 : 0 : 1)$ est le seul point singulier de C.

6. Montrer que l'application rationnelle $\varphi : Z(X^2 - YZ) \to \mathbb{P}^1$, $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ est une application régulière de 3 façons.

7. Soit $V = \mathbb{A}^1_k$.

(a) Calculer $k[V]$ et $k(V)$;

(b) Montrer que V est une courbe ;

(c) Pour tout $x \in V$, montrer que Γ_x est un anneau de valuation discrète et trouver une uniformisante ;

(d) Pour $x = 1$, calculer les valuations dans Γ_1 des éléments suivants : $X - 1$, $X + 1$, $(X - 1)^3$, $X^3 - 1$;

(e) Montrer que l'anneau $\{F/G \in k(V) \mid \deg(G) \geq \deg(F)\}$ est aussi un anneau de valuation discrète, et trouver une uniformisante.