

Courbes algébriques - TD 7

1. Calculer les diviseurs (principaux) associés aux fonctions rationnelles sur \mathbb{P}^1 suivantes :

$$f_1 = \frac{X^2 + XY + Y^2}{X^2 + Y^2}, \quad f_2 = \frac{X^2 + XY + Y^2}{XY + Y^2} \quad \text{et} \quad f_3 = \frac{X^2 + 2XY + Y^2}{XY + Y^2}.$$

2. Calculer $\text{div}(f)$ pour $f = X/Y \in k(C)$ si

(a) $C = \mathbb{P}^1$;

(b) $C = Z(XY - Z^2) \subset \mathbb{P}^2$;

(c) $C = Z(ZY^2 - X^3 - Z^3) \subset \mathbb{P}^2$.

3. Montrer que tout diviseur de degré 0 de \mathbb{P}^1 est principal. Calculer $\text{Pic}(\mathbb{P}^1)$ et $\text{Pic}^0(\mathbb{P}^1)$.

4. Calculer le degré du morphisme $f_d : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $(x : y) \mapsto (x^d : y^d)$ pour $d \in \mathbb{Z}_{>0}$.

5. Calculer le degré du morphisme $f_d : \mathbb{P}^1 \rightarrow Z(X^2 - YZ) \subset \mathbb{P}^2$, $(x : y) \mapsto (x^d y^d : x^{2d} : y^{2d})$ pour $d \in \mathbb{Z}_{>0}$.