

Correspondance galoisienne - TD 8

1. Dans tous les exemples des exercices 1–4 du TD 7, déterminer si les extensions  $E/F$  sont galoisiennes en utilisant tous les critères possibles.
2. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ .
3. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$ .
4. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ .
5. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$  où  $\omega := e^{2\pi i/3}$ .
6. Si  $E$  est le corps de décomposition du polynôme  $x^3 - 1$ , étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $E/\mathbb{Q}$ .
7. Si  $E$  est le corps de décomposition du polynôme  $x^8 - 1$ , étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $E/\mathbb{Q}$ .
8. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2$ .
9. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{F}_8/\mathbb{F}_2$ .
10. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{F}_{16}/\mathbb{F}_2$ .
11. Étudier la correspondance galoisienne pour l'extension  $\mathbb{F}_{32}/\mathbb{F}_2$ .
12. Soit  $F$  un corps et  $c \in F^*$ . Soit  $E$  le corps de décomposition de  $f(x) := x^n - c \in F[x]$ . Si  $\text{car } F$  ne divise pas  $n$  et  $F$  contient une racine  $n$ -ième de l'unité primitive, montrer que :
  - (a)  $E = F(a)$  où  $a$  est une racine de  $f(x)$ .
  - (b)  $E/F$  est galoisienne.
  - (c)  $\text{Gal}(E/F)$  est un groupe cyclique.
  - (d) Si  $f(x)$  est irréductible,  $|\text{Gal}(E/F)| = n$ .