

Morphismes d'extensions - TD 7

1. Est-ce qu'on peut construire à la règle et au compas un parallélogramme rectangulaire dont l'aire est égale à 2 et dont un côté a satisfait $a^4 - 3a^2 + 4 = d^2$, où d est la diagonale.
2. Soit F un corps fini avec $|F| = p^n$ où p est un nombre premier. Montrer que F est le corps de décomposition d'un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_p[x]$ de degré n .
3. Soit F un corps et $p(x) \in F[x]$ irréductible. Si K et L sont deux corps de rupture de $p(x)$, alors K et L sont isomorphes comme F -algèbres.
4. Déterminer $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathbb{C})$ et $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(E)$ pour
 - (a) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
 - (b) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
 - (c) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.
 - (d) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$.
 - (e) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.
 - (f) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$.
 - (g) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$.
 - (h) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.
 - (i) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
 - (j) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3})$.
 - (k) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
 - (l) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}, i)$.
 - (m) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{6}})$.
 - (n) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{6}}, \sqrt{5}i)$.
5. Soit Ω une extension algébriquement close de \mathbb{F}_3 , et soit E le corps de décomposition du polynôme $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$. Déterminer $\text{Hom}_{\mathbb{F}_3}(E, \Omega)$ et $\text{Aut}_{\mathbb{F}_3}(E)$.
6. Soit Ω une extension algébriquement close de $\mathbb{F}_3(t)$, et soit E le corps de décomposition du polynôme $x^3 - t^2 - t - 1 \in \mathbb{F}_3(t)[x]$. Déterminer $\text{Hom}_{\mathbb{F}_3(t)}(E, \Omega)$ et $\text{Aut}_{\mathbb{F}_3(t)}(E)$.
7. Dans tous les exemples des Exercices 1–4 déterminer si les extensions sont séparables, normales ou galoisiennes.
8. Soient $F \subseteq K \subseteq E$ des corps tels que E/F est finie. Montrer que :
 - (a) Si E/F est séparable, alors E/K et K/F sont séparables.
 - (b) Si E/K et K/F sont séparables, alors E/F séparable.
 - (c) Si E/F est normale, alors E/K est normale.
 - (d) L'extension K/F est normale si et seulement si $\varphi(K) = K$ pour tout $\varphi \in \text{Hom}_F(E, \Omega)$.
9. Soit F un corps. Montrer que le polynôme $f(x) := x^n - 1_F \in F[x]$ est séparable si et seulement si car F ne divise pas n . Dans ce cas là, soit E le corps de décomposition de $f(x)$. Montrer que :
 - (a) E/F est galoisienne.
 - (b) $\text{Aut}_F(E)$ est un groupe abélien.
 - (c) Si n est un nombre premier, $\text{Aut}_F(E)$ est un groupe cyclique.
 - (d) Si $n = 8$, $\text{Aut}_F(E)$ n'est pas un groupe cyclique.