

Anneaux et polynômes - TD 1

1. Soit $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\text{Im} f$ est un sous-anneau de S .
2. Soit $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que $\text{Ker} f$ est un idéal de R .
3. Soit $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de S . Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de R .
4. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R .
5. Soit $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors f est injectif.
6. Soit $f : R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux. Si S est un anneau intègre, alors $\text{Ker} f$ est un idéal premier de R .
7. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x-1) \cong \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{Q}^2$; $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Q}[i]$. Déterminer si les idéaux $(x-1)$, (x^2-1) et (x^2+1) sont premiers et/ou maximaux dans $\mathbb{Q}[x]$.
8. Montrer que R est un anneau intègre si et seulement si $R[x]$ est un anneau intègre. Montrer que $R[x]$ n'est jamais un corps, et déterminer ses éléments inversibles.
9. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$. L'idéal $(f(x))$ est maximal si et seulement si $(f(x))$ est premier, qui est vrai si et seulement si $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.
10. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$. Montrer que si $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ et $f(x)$ n'a pas de racines dans k , alors $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.
11. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le polynôme $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si $\deg f(x) = 1$ ou $\deg f(x) = 2$ et $f(x)$ n'a pas de racines réelles.
12. Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ avec $a_n \neq 0$. S'il existe un nombre premier p tel que
 - (i) p divise a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ,
 - (ii) p ne divise pas a_n , et
 - (iii) p^2 ne divise pas a_0 ,alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ ("critère de Eisenstein").
13. Si R est un anneau avec $\text{car} R = p$ où p est un nombre premier, alors
$$(a+b)^p = a^p + b^p \quad \text{et} \quad (a-b)^p = a^p - b^p$$
pour tous $a, b \in R$.
14. Si R est un anneau intègre avec $\text{car} R = p$ où p est un nombre premier, alors l'application (de Frobenius) $F : R \rightarrow R, a \mapsto a^p$ est un monomorphisme.