

Corps de décomposition - TD 4

Sauf si c'est précisé autrement, tous les polynômes sont considérés dans $\mathbb{Q}[x]$.

Rappel : $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ est irréductible si et seulement $f(x+1) \in \mathbb{Q}[x]$ est irréductible.

1. Décrire le corps de décomposition du polynôme $(x^2 - 5)(x^2 + 1)$.
2. Montrer que le corps de décomposition E d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[x]$ est une extension simple de \mathbb{Q} . Déterminer $[E : \mathbb{Q}]$.
3. Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^4 - 2$.
4. Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^3 - 1$.
5. Décrire le corps de décomposition du polynôme $f_m(x) = x^3 - m$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
6. Soit E le corps de décomposition d'un polynôme $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degré 3. Si $[E : \mathbb{Q}] = 3$, montrer que toutes les racines du polynôme sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
7. Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^4 - 2x^2 - 5$.
8. Soit $f(x)$ le polynôme minimal de $\alpha := \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Montrer que le corps de décomposition de $f(x)$ est $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{7})$.
9. Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$.