

Morphismes d'extensions de corps - TD 8

1. Dans tous les exemples des exercices du TD7 déterminer si les extensions sont séparables, normales ou galoisiennes.
2. Soient $F \subseteq K \subseteq E$ des corps tels que E/F est finie. Montrer que :
 - (a) Si E/F est séparable, alors E/K et K/F sont séparables.
 - (b) Si E/K et K/F sont séparables, alors E/F est séparable.
 - (c) Si E/F est normale, alors E/K est normale.
 - (d) L'extension K/F est normale si et seulement si $\varphi(K) = K$ pour tout $\varphi \in \text{Hom}_F(E, \Omega)$, où Ω est une extension algébriquement close de E .
3. Soit F un corps. Montrer que le polynôme $f(x) := x^n - 1_F \in F[x]$ est séparable si et seulement si car F ne divise pas n . Dans ce cas là, soit E le corps de décomposition de $f(x)$. Montrer que :
 - (a) E/F est galoisienne.
 - (b) $\text{Aut}_F(E)$ est un groupe abélien.
 - (c) Si n est un nombre premier, $\text{Aut}_F(E)$ est un groupe cyclique.
 - (d) Si $n = 8$, $\text{Aut}_F(E)$ n'est pas un groupe cyclique.