Fonctions d'ordre pour les algèbres de Hecke et les algèbres de Cherednik

Maria Chlouveraki

Université de Versailles - St Quentin

Notation

- $V =$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
- $W =$ un groupe de réflexions complexe dans $\mathrm{GL}(V)$.
- $\mathcal{A} =$ l'ensemble d'hyperplans de réflexion de W.
- $W_H =$ le fixateur de $H \in \mathcal{A}$ dans W.
- $e_H = |W_H|$.
- $\alpha_H =$ un élément de V^* tel que $\mathrm{Ker}\,(\alpha_H) = H$.
- $v_H =$ un élément de V tel que $V = H \oplus \mathbb{C}v_H$, et $\mathbb{C}v_H$ stable par W_H.
- $V^{\mathrm{reg}} = V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$.
- $B_W = \pi_1(V^{\mathrm{reg}}/W, x_0)$ pour $x_0 \in V^{\mathrm{reg}}$.
- $\zeta_e = \exp(2\pi i/e)$, pour $e \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- $e_{\mathcal{C}} = e_H$ pour tout $H \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$.
- $U = \{(\mathcal{C}, j) \,|\, \mathcal{C} \in \mathcal{A}/W,\, 0 \leqslant j < e_{\mathcal{C}}\}$.

Algèbres de Hecke

Soit $\{\mathbf{q}_u\}_{u\in U}$ un ensemble d'indéterminées, et $\mathbf{k} := \mathbb{C}[\{\mathbf{q}_u^{\pm 1}\}_{u\in U}]$.
L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ de W sur $\mathbf{k}$ est le quotient de $\mathbf{k}[B_W]$ par les relations

$$\prod_{0\leqslant j<e_H} (T_H - \zeta_{e_H}^j \mathbf{q}_{H,j}) = 0,$$

où T_H est un générateur de monodromie autour de H, pour tout $H \in \mathcal{A}$.

Hypothèses

L'algèbre $\mathcal{H}$ est libre sur $\mathbf{k}$, de rang $|W|$. Il existe une forme symétrisante $\tau : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{k}$ qui devient la forme symétrisante canonique sur $\mathbb{C}[W]$ quand $\mathbf{q}_{H,j} \mapsto 1$.

On a

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{Frac}(\mathbf{k})\mathcal{H}) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W) \quad \text{et} \quad \tau = \sum_{E\in\mathrm{Irr}(W)} \frac{1}{s_E}\chi_E .$$

où $s_E \in \mathbf{k}$ est l'élément de Schur "générique" associé à $E \in \mathrm{Irr}(W)$.

Si $\Theta : \mathbf{k} \to k$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres, on pose $\mathcal{H}_\Theta := \mathcal{H} \otimes_{\mathbf{k}} k$.

Soit $m := (m_u)_{u \in U}$ une famille d'entiers tels que $\Theta(\mathbf{q}_u) = q^{m_u}$.

- Si q est une indéterminée, on appelle Θ une spécialisation cyclotomique, et on pose $\mathcal{H}_{q,m} := \mathcal{H}_\Theta$. On a

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q)\mathcal{H}_{q,m}) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W).$$

Pour $E \in \mathrm{Irr}(W)$, on pose

$$a_E = -\mathrm{val}_q(\Theta(s_E)) \quad \text{and} \quad A_E = -\deg_q(\Theta(s_E)).$$

- Si $q \in \mathbb{C}^\times$ et q n'est pas une racine de l'unité, alors $\mathbb{C}\mathcal{H}_\Theta$ est semisimple, et on a

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}\mathcal{H}_\Theta) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W).$$

- Si $q \in \mathbb{C}^\times$ et $q^e = 1$ pour un certain $e > 1$, alors $\mathbb{C}\mathcal{H}_\Theta$ n'est pas semisimple en général.

Algèbres de Cherednik

Soit $\{\mathbf{h}_u\}_{u\in U}$ un ensemble d'indéterminées, et $\mathbf{R} := \mathbb{C}[\{\mathbf{h}_u\}_{u\in U}]$.
L'algèbre de Cherednik rationnelle $\mathbf{H}$ de W sur $\mathbf{R}$ ("en $t \neq 0$") est le quotient de $\mathbf{R} \otimes_{\mathbb{C}} T(V \oplus V^*) \rtimes W$ par les relations

$$[\xi, \eta] = 0 \;\text{ pour } \xi, \eta \in V, \quad [x, y] = 0 \;\text{ pour } x, y \in V^*$$

$$[\xi, x] = \langle \xi, x\rangle + \sum_{H\in\mathcal{A}} \frac{\langle \xi, \alpha_H\rangle\langle v_H, x\rangle}{\langle v_H, \alpha_H\rangle}\gamma_H$$

où

$$\gamma_H = \sum_{w\in W_H\setminus\{1\}} \left(\sum_{j=0}^{e_H-1} \det(w)^{-j}(\mathbf{h}_{H,j} - \mathbf{h}_{H,j-1}) \right) w.$$

L'algèbre $\mathbf{H}$ a une décomposition triangulaire :

$$\mathbf{R}[V] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[W] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[V^*].$$

Encore une fois, pour $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$, on pose $\mathbf{H}_\Psi = \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbb{C}$.

$$\mathbf{eu} := -\sum_{H\in\mathcal{A}}\sum_{j=0}^{e_H-1}\left(\sum_{w\in W_H}(\det w)^{-j}w\right)\Psi(\mathbf{h}_{H,j}) \in Z(\mathbb{C}[W]).$$

Soit $E \in \mathrm{Irr}(W)$. On dénote par c_E le scalaire avec laquelle **eu** agit sur E, c.à.d.

$$c_E := \omega_{\chi_E}(\mathbf{eu}) = \chi_E(\mathbf{eu})/\chi_E(1).$$

Soit $\mathcal{O}_\Psi$ la catégorie de $\mathbf{H}_\Psi$-modules de type fini qui sont localement nilpotents pour l'action de $V \subset \mathbb{C}[V^*]$. Elle est une catégorie de plus haut poids. Ses objets standards sont

$$\Delta_\Psi(E) := \mathbf{H}_\Psi \otimes_{\mathbb{C}[V^*]\rtimes W} E$$

où $E \in \mathrm{Irr}W$, et ils sont ordonnés par

$$\Delta_\Psi(E) < \Delta_\Psi(F) \text{ si et seulement si } c_F - c_E \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

On écrira $E <_\Psi F$ si $c_F - c_E \in \mathbb{Z}_{>0}$. De plus, le modules non-isomorphes

$$L_\Psi(E) := \Delta_\Psi(E)/\mathrm{rad}\,(\Delta_\Psi(E))$$

sont les modules simples de $\mathcal{O}_\Psi$.

Ensembles basiques

Il y a un foncteur exact

$$\mathsf{KZ}_\Psi : \mathcal{O}_\Psi \to \mathcal{H}_\Theta - \mathrm{mod}$$

où $\Theta(\mathbf{q}_u) = \exp(2\pi i \Psi(\mathbf{h}_u))$ pour tout $u \in U$.

$$S_q(E) := \mathsf{KZ}_\Psi(\Delta_\Psi(E)) \quad \text{and} \quad D_q(E) := \mathsf{KZ}_\Psi(L_\Psi(E)).$$

Si $D_q(E) \neq 0$, alors $D_q(E)$ est simple. Soit $\mathbf{B} := \{E \in \mathrm{Irr}(W) \mid D_q(E) \neq 0\}$.

Proposition

(a) L'ensemble $\{D_q(E) : E \in \mathbf{B}\}$ est un ensemble complet de $\mathcal{H}_\Theta$-modules simples non-isomorphes.

(b) Si $E \in \mathbf{B}$, alors $[S_q(E) : D_q(E)] = 1$.

(c) Si $[S_q(F) : D_q(E)] \neq 0$ pour $F \in \mathrm{Irr}(W)$ et $E \in \mathbf{B}$, alors $F = E$ ou $E <_\Psi F$.

Pour la preuve, on utilise que, comme KZ_Ψ est exact, on a

$$[S_q(F) : D_q(E)] = [\Delta_\Psi(F) : L_\Psi(E)] \quad \text{si} \quad D_q(E) \neq 0.$$

On dit que **B** est un ensemble basique par rapport à la fonction c.

Si $f : \mathrm{Irr}(W) \to \mathbb{C}$ et $\mathbf{B}' \subseteq \mathrm{Irr}(W)$ comme ci-dessus, on dit que $\mathbf{B}'$ est un ensemble basique par rapport à la fonction f.

Dans le cas où $\Psi(h_u) \in \mathbb{Q}$ pour tout $u \in U$, un ensemble basique par rapport à la fonction a est un ensemble basique canonique dans le sens de Geck-Rouquier.

Comparaison des ordres

On rappelle la spécialisation cyclotomique

$$\Theta : \mathbb{C}[\{\mathbf{q}_u^{\pm 1}\}] \to \mathbb{C}[q^{\pm 1}],\ \mathbf{q}_u \mapsto q^{m_u}.$$

Proposition (CGG)

Pour $\Psi(h_u) = m_u$, on a

$$a_E + A_E = c_E + \sum_{H \in \mathcal{A}} \sum_{j=0}^{e_H - 1} m_{H,j}.$$

Malheureusement les ordres imposés par les fonctions a et c ne sont pas compatibles en général.

Question : *Est-ce qu'il y a un ordre pour la catégorie $\mathcal{O}_\Psi$ compatible avec la fonction a?*

Cas où W est un groupe de Coxeter fini

Soit W un groupe de Coxeter fini, et $L : W \to \mathbb{Z}$ une fonction de poids, i.e.,

$$L(ww') = L(w) + L(w') \quad \text{si} \quad l(ww') = l(w) + l(w').$$

Si les conjectures (P1)–(P15) de Lusztig sont supposées vraies, l'algèbre de Hecke cyclotomique de W définie par

$$q_{H,0} \mapsto q^{L(s_H)} \quad \text{et} \quad q_{H,1} \mapsto q^{-L(s_H)}, \quad \text{pour tout } H \in \mathcal{A}$$

obtient la structure d'une algèbre cellulaire **[Geck]**.

Théorème (CGG)

Soit W un groupe de Coxeter fini et $\Psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\Psi(\mathbf{h}_{H,0}) = \lambda L(s_H)$ et $\Psi(\mathbf{h}_{H,1}) = -\lambda L(s_H)$ pour une fonction de poids $L : W \to \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Soit $E \in \mathrm{Irr}(W)$. On a $\mathsf{KZ}_\Psi(L_\Psi(E)) \neq 0$ si et seulement si E appartient à l'ensemble basique canonique correspondant.

Cas où W est un groupe de Coxeter fini

Soit W un groupe de Coxeter fini, et $L : W \to \mathbb{Z}$ une fonction de poids, i.e.,

$$L(ww') = L(w) + L(w') \quad \text{si} \quad l(ww') = l(w) + l(w').$$

Si les conjectures (P1)–(P15) de Lusztig sont supposées vraies, l'algèbre de Hecke cyclotomique de W définie par

$$q_{H,0} \mapsto q^{L(s_H)} \quad \text{et} \quad q_{H,1} \mapsto q^{-L(s_H)}, \quad \text{pour tout } H \in \mathcal{A}$$

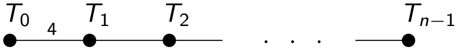
obtient la structure d'une algèbre cellulaire **[Geck]**.

Théorème (CGG)

Soit W un groupe de Coxeter fini et $\Psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\Psi(\mathbf{h}_{H,0}) = \lambda L(s_H)$ et $\Psi(\mathbf{h}_{H,1}) = -\lambda L(s_H)$ pour une fonction de poids $L : W \to \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $E \in \mathrm{Irr}(W)$. On a $\mathsf{KZ}_\Psi(L_\Psi(E)) \neq 0$ si et seulement si E appartient à l'ensemble basique canonique "correspondant". De plus, $\mathsf{KZ}_\Psi(\Delta_\Psi(E))$ et isomorphe au module de cellules $W_\Theta(E)$.

Cas où W est un groupe de type $G(\ell, 1, n)$

Soient $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $(s_0, s_1, \ldots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$. On considère $\mathcal{H}_\Theta$ définie par

- générateurs : $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$
- relations : 

.

$$(T_0 - \zeta_e^{s_0})(T_0 - \zeta_e^{s_1}) \cdots (T_0 - \zeta_e^{s_{\ell-1}}) = 0$$

$$(T_i - \zeta_e)(T_i + 1) = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1.$$

On pose $m_j := \ell s_j - je$ et $m := (m_j)_{0 \leqslant j < \ell}$. On considère l'algèbre de Hecke cyclotomique $\mathcal{H}_{q,m}$ avec relations :

$$\left.\begin{array}{l} (T_0 - q^{m_0})(T_0 - \zeta_\ell q^{m_1}) \cdots (T_0 - \zeta_\ell^{\ell-1} q^{m_{\ell-1}}) = 0 \\ \\ (T_i - q^\ell)(T_i + 1) = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n-1 \end{array}\right\} \quad \Theta : q \mapsto \zeta_{e\ell}.$$

$$\Pi_n^\ell = \{\ell\text{-partitions de } n\} \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{Irr}(G(\ell,1,n)) \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{Irr}(\mathcal{H}_{q,m})$$

$$\lambda = (\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(\ell-1)}) \quad \mapsto \quad E^\lambda$$

Théorème (Geck-Jacon)

Ensemble basique canonique $\leftrightarrow$ $\{\ell$-partitions de Uglov$\}$.

$$[\lambda] := \{\gamma = (a,b,c) \,|\, 0 \leqslant c \leqslant \ell - 1,\ a \geq 1,\ 1 \leqslant b \leqslant \lambda_a^{(c)}\}.$$

$$\mathrm{cont}(\gamma) := b(\gamma) - a(\gamma) \quad \text{et} \quad \vartheta(\gamma) := \mathrm{cont}(\gamma) + s_c.$$

Théorème (Dunkl-Griffeth)

Soient λ, $\lambda' \in \Pi_n^\ell$. Si $[\Delta_\Psi(E^\lambda) : L_\Psi(E^{\lambda'})] \neq 0$, alors il existe un ordre sur les noeuds $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ de λ et λ' respectivement, et des entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\mu_i \equiv c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) \bmod \ell \quad \text{et} \quad \mu_i = c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) + \frac{\ell}{e}(\vartheta(\gamma'_i) - \vartheta(\gamma_i)).$$

Théorème (CGG)

Soient λ, $\lambda' \in \Pi_n^\ell$. Si $[\Delta_\Psi(E^\lambda) : L_\Psi(E^{\lambda'})] \neq 0$, alors soit $\lambda = \lambda'$ soit $a_{E^{\lambda'}} < a_{E^\lambda}$.

Preuve : Soient γ et γ' des noeuds de ℓ-partitions. On écrit $\gamma \prec \gamma'$ si on a

$$\vartheta(\gamma) < \vartheta(\gamma') \quad \text{ou} \quad \vartheta(\gamma) = \vartheta(\gamma') \text{ et } c(\gamma) > c(\gamma').$$

En utilisant le résultat de Dunkl et Griffeth, on peut ordonner les noeuds $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ de λ et λ' respectivement tels que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\gamma_i \prec \gamma'_i \quad \text{ou} \quad \gamma_i = \gamma'_i.$$

Dans ce cas, on peut prouver que soit $\lambda = \lambda'$ soit $a_{E^{\lambda'}} < a_{E^\lambda}$.

Corollaire

Soit W un groupe de type $G(\ell, 1, n)$, $e \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(s_0, \ldots, s_{\ell-1}) \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$ tel que $\Psi(\mathbf{h}_{0,j}) = \frac{s_j}{e} - \frac{j}{\ell} = \frac{m_j}{e\ell}$ pour $j = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ et $\Psi(\mathbf{h}_{i,0}) = \frac{1}{e}$, $\Psi(\mathbf{h}_{i,1}) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On a $\mathrm{KZ}_\Psi(L_\Psi(E^\lambda)) \neq 0$ si et seulement si λ est une ℓ-partition de Uglov par rapport à $(e\,; s_0, \ldots, s_{\ell-1})$.