Αλγεβρες Hecke και Βασικα Συνολα

Μαρία Χλουβεράκη

(σε συνεργασία με τον N. Jacon)

University of Edinburgh

Σεμινάριο Άλγεβρας & Γεωμετρίας
του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

17 Δεκεμβρίου 2009

Θεωρία αναπαραστάσεων

Έστω F ένα σώμα και G μια ομάδα. Ένας F-διανυσματικός χώρος V μαζί με έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι μια αναπαράσταση της ομάδας G.

Θεωρία αναπαραστάσεων

Έστω F ένα σώμα και G μια ομάδα. Ένας F-διανυσματικός χώρος V μαζί με έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι μια αναπάρασταση της ομάδας G. Ο χώρος V λέγεται και G-πρότυπο, γιατι η απεικόνιση ρ ορίζει μια δράση της ομάδας G επί του V ως εξής:

$$\begin{array}{rcl} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g)(v). \end{array}$$

Θεωρία αναπαραστάσεων

Έστω F ένα σώμα και G μια ομάδα. Ένας F-διανυσματικός χώρος V μαζί με έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι μια αναπάρασταση της ομάδας G. Ο χώρος V λέγεται και G-πρότυπο, γιατι η απεικόνιση ρ ορίζει μια δράση της ομάδας G επί του V ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g)(v). \end{array}$$

Η συνάρτηση $\chi_\rho : G \to F$, $g \mapsto$ Ίχνος$(\rho(g))$ λέγεται χαρακτήρας της αναπαράστασης ρ.

Θεωρία αναπαραστάσεων

Έστω F ένα σώμα και G μια ομάδα. Ένας F-διανυσματικός χώρος V μαζί με έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι μια αναπαράσταση της ομάδας G. Ο χώρος V λέγεται και G-πρότυπο, γιατι η απεικόνιση ρ ορίζει μια δράση της ομάδας G επί του V ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g)(v). \end{array}$$

Η συνάρτηση $\chi_\rho : G \to F$, $g \mapsto$ Ίχνος$(\rho(g))$ λέγεται χαρακτήρας της αναπαράστασης ρ.

Μια αναπαράσταση V λέγεται ανάγωγη (η απλό G-πρότυπο) αν $V \neq \{0\}$ και ο χώρος V δεν έχει μη τετριμμένους γνήσιους υπόχωρους που είναι επίσης αναπαραστάσεις της ομάδας G.

Θεωρία αναπαραστάσεων

Έστω F ένα σώμα και G μια ομάδα. Ένας F-διανυσματικός χώρος V μαζί με έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι μια αναπαράσταση της ομάδας G. Ο χώρος V λέγεται και G-πρότυπο, γιατι η απεικόνιση ρ ορίζει μια δράση της ομάδας G επί του V ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g)(v). \end{array}$$

Η συνάρτηση $\chi_\rho : G \to F$, $g \mapsto$ Ίχνος$(\rho(g))$ λέγεται χαρακτήρας της αναπαράστασης ρ.

Μια αναπαράσταση V λέγεται ανάγωγη (η απλό G-πρότυπο) αν $V \neq \{0\}$ και ο χώρος V δεν έχει μη τετριμμένους γνήσιους υπόχωρους που είναι επίσης αναπαραστάσεις της ομάδας G. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Irr}(G)$ το σύνολο των ανάγωγων αναπαραστάσεων της ομάδας G.

Θεωρία αναπαραστάσεων

Έστω F ένα σώμα και G μια ομάδα. Ένας F-διανυσματικός χώρος V μαζί με έναν ομομορφισμό ομάδων $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ είναι μια αναπαράσταση της ομάδας G. Ο χώρος V λέγεται και G-πρότυπο, γιατι η απεικόνιση ρ ορίζει μια δράση της ομάδας G επί του V ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & \rho(g)(v). \end{array}$$

Η συνάρτηση $\chi_\rho : G \to F$, $g \mapsto$ Ίχνος$(\rho(g))$ λέγεται χαρακτήρας της αναπαράστασης ρ.

Μια αναπαράσταση V λέγεται ανάγωγη (η απλό G-πρότυπο) αν $V \neq \{0\}$ και ο χώρος V δεν έχει μη τετριμμένους γνήσιους υπόχωρους που είναι επίσης αναπαραστάσεις της ομάδας G. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Irr}(G)$ το σύνολο των ανάγωγων αναπαραστάσεων της ομάδας G.

Αντίστοιχα, ονομάζουμε αναπαράσταση μιας F-άλγεβρας A κάθε A-πρότυπο.

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)\right) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα:

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων,

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)\right) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων, οι διεδρικές ομάδες.

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων, οι διεδρικές ομάδες.

Μια ομάδα ανακλάσεων ονομάζεται ομάδα Weyl αν τα ίχνη όλων των στοιχείων της είναι ρητοί αριθμοί.

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων, οι διεδρικές ομάδες.

Μια ομάδα ανακλάσεων ονομάζεται ομάδα Weyl αν τα ίχνη όλων των στοιχείων της είναι ρητοί αριθμοί.

Παραδείγματα:

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων, οι διεδρικές ομάδες.

Μια ομάδα ανακλάσεων ονομάζεται ομάδα Weyl αν τα ίχνη όλων των στοιχείων της είναι ρητοί αριθμοί.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων,

Ομάδες Ανακλάσεων

Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης m.

Μια ανάκλαση είναι μια απεικόνιση $s \in \mathrm{GL}(V)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $s^2 = \mathrm{id}_V$,
2. $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)) = m - 1$.

Μια πεπερασμένη υποομάδα του $\mathrm{GL}(V)$ που παράγεται από ανακλάσεις ονομάζεται ομάδα ανακλάσεων.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων, οι διεδρικές ομάδες.

Μια ομάδα ανακλάσεων ονομάζεται ομάδα Weyl αν τα ίχνη όλων των στοιχείων της είναι ρητοί αριθμοί.

Παραδείγματα: οι ομάδες μεταθέσεων, οι διεδρικές ομάδες τάξης 6, 8 και 12.

Ομάδες Coxeter

Μια ομάδα W είναι ομάδα Coxeter αν έχει μια παράσταση από γεννήτορες και σχέσεις της μορφής:

$$W = \langle\ S \mid (st)^{m_{st}} = 1\ \ \forall s, t \in S\ \rangle\ ,$$

όπου $m_{ss} = 1$ και $m_{st} \geq 2$ για $s \neq t$.

Ομάδες Coxeter

Μια ομάδα W είναι ομάδα Coxeter αν έχει μια παράσταση από γεννήτορες και σχέσεις της μορφής:

$$W = \langle\ S \mid (st)^{m_{st}} = 1\ \ \forall s, t \in S\ \rangle\ ,$$

όπου $m_{ss} = 1$ και $m_{st} \geq 2$ για $s \neq t$.

Θεώρημα

1. Μια ομάδα είναι ομάδα ανακλάσεων αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη ομάδα Coxeter.

Ομάδες Coxeter

Μια ομάδα W είναι ομάδα Coxeter αν έχει μια παράσταση από γεννήτορες και σχέσεις της μορφής:

$$W = \langle\ S \mid (st)^{m_{st}} = 1\ \ \forall s, t \in S\ \rangle\ ,$$

όπου $m_{ss} = 1$ και $m_{st} \geq 2$ για $s \neq t$.

Θεώρημα

1. Μια ομάδα είναι ομάδα ανακλάσεων αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη ομάδα Coxeter.
2. Μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter είναι ομάδα Weyl αν και μόνο αν $m_{st} \in \{2, 3, 4, 6\}$ για κάθε $s \neq t \in S$.

Ομάδες Coxeter

Μια ομάδα W είναι ομάδα Coxeter αν έχει μια παράσταση από γεννήτορες και σχέσεις της μορφής:

$$W = \langle\ S \mid (st)^{m_{st}} = 1\ \ \forall s, t \in S\ \rangle\ ,$$

όπου $m_{ss} = 1$ και $m_{st} \geq 2$ για $s \neq t$.

Θεώρημα

1. Μια ομάδα είναι ομάδα ανακλάσεων αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη ομάδα Coxeter.
2. Μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter είναι ομάδα Weyl αν και μόνο αν $m_{st} \in \{2, 3, 4, 6\}$ για κάθε $s \neq t \in S$.

Έστω $w \in W$. Ονομάζουμε μήκος του w και συμβολίζουμε με $\ell(w)$ τον ακέραιο

$$\ell(w) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid w = s_1 s_2 \ldots s_r,\ \ s_i \in S\}\ .$$

Ομάδες Coxeter

Μια ομάδα W είναι ομάδα Coxeter αν έχει μια παράσταση από γεννήτορες και σχέσεις της μορφής:

$$W = \langle\ S \mid (st)^{m_{st}} = 1 \ \ \forall s,t \in S\ \rangle\ ,$$

όπου $m_{ss} = 1$ και $m_{st} \geq 2$ για $s \neq t$.

Θεώρημα

1. Μια ομάδα είναι ομάδα ανακλάσεων αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη ομάδα Coxeter.
2. Μια πεπερασμένη ομάδα Coxeter είναι ομάδα Weyl αν και μόνο αν $m_{st} \in \{2,3,4,6\}$ για κάθε $s \neq t \in S$.

Έστω $w \in W$. Ονομάζουμε μήκος του w και συμβολίζουμε με $\ell(w)$ τον ακέραιο

$$\ell(w) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid w = s_1 s_2 \ldots s_r,\ \ s_i \in S\}\,.$$

Η έκφραση $w = s_1 s_2 \ldots s_r$ του w ως γινόμενο στοιχείων του S λέγεται μειωμένη αν $r = \ell(w)$.

Άλγεβρες Iwahori-Hecke

Έστω ότι

Άλγεβρες Iwahori-Hecke

Έστω ότι

$$W = \langle\ S \mid \underbrace{ststst\ldots}_{m_{st}} = \underbrace{tststs\ldots}_{m_{st}},\ s^2 = 1\ \forall s,t \in S\ \rangle.$$

είναι μια ομάδα Weyl.

Άλγεβρες Iwahori-Hecke

Έστω ότι

$$W = \langle\, S \mid \underbrace{ststst\ldots}_{m_{st}} = \underbrace{tststs\ldots}_{m_{st}},\ s^2 = 1\ \forall s,t \in S\,\rangle.$$

είναι μια ομάδα Weyl.

Παραδείγματα:

Άλγεβρες Iwahori-Hecke

Έστω ότι

$$W = \langle\ S \mid \underbrace{ststst\ldots}_{m_{st}} = \underbrace{tststs\ldots}_{m_{st}},\ s^2 = 1\ \forall s,t \in S\ \rangle.$$

είναι μια ομάδα Weyl.

Παραδείγματα:

1. $G_2 = \Big\langle\ s,t \mid ststst = tststs,\ s^2 = t^2 = 1\ \Big\rangle$

Άλγεβρες Iwahori-Hecke

Έστω ότι

$$W = \langle\ S \mid \underbrace{ststst\ldots}_{m_{st}} = \underbrace{tststs\ldots}_{m_{st}},\ s^2 = 1\ \forall s,t \in S\ \rangle.$$

είναι μια ομάδα Weyl.

Παραδείγματα:

1. $G_2 = \langle\ s,t \mid ststst = tststs,\ s^2 = t^2 = 1\ \rangle$
2. $\mathfrak{S}_n = \left\langle\ s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \ \middle|\ \begin{array}{l} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \ \text{αν}\ |i-j| > 1, \\ s_i^2 = 1 \end{array} \right\rangle$

Έστω $\mathbf{u} = (u_s)_{s \in S}$ μια οικογένεια ακεραίων με την ιδιότητα:

Αν $s, t \in S$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας W, τότε $u_s = u_t$.

Έστω $\mathbf{u} = (u_s)_{s \in S}$ μια οικογένεια ακεραίων με την ιδιότητα:

> Αν $s, t \in S$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας W, τότε $u_s = u_t$.

Έστω $\mathbf{v} = (v_s)_{s \in S}$ μια δεύτερη οικογένεια ακεραίων με την παραπάνω ιδιότητα και q μια μεταβλητή.

Έστω $\mathbf{u} = (u_s)_{s \in S}$ μια οικογένεια ακεραίων με την ιδιότητα:

Αν $s, t \in S$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας W, τότε $u_s = u_t$.

Έστω $\mathbf{v} = (v_s)_{s \in S}$ μια δεύτερη οικογένεια ακεραίων με την παραπάνω ιδιότητα και q μια μεταβλητή. Η Iwahori-Hecke άλγεβρα $\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ του W είναι η $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-άλγεβρα με την εξής παράσταση:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \langle (T_s)_{s \in S} \mid \underbrace{T_s T_t T_s \ldots}_{m_{st}} = \underbrace{T_t T_s T_t \ldots}_{m_{st}}, \ (T_s - q^{2u_s})(T_s + q^{2v_s}) = 0 \ \forall s, t \in S \rangle.$$

Έστω $\mathbf{u} = (u_s)_{s\in S}$ μια οικογένεια ακεραίων με την ιδιότητα:

Αν $s, t \in S$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας W, τότε $u_s = u_t$.

Έστω $\mathbf{v} = (v_s)_{s\in S}$ μια δεύτερη οικογένεια ακεραίων με την παραπάνω ιδιότητα και q μια μεταβλητή. Η Iwahori-Hecke άλγεβρα $\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ του W είναι η $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-άλγεβρα με την εξής παράσταση:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \langle (T_s)_{s\in S} \mid \underbrace{T_s T_t T_s \ldots}_{m_{st}} = \underbrace{T_t T_s T_t \ldots}_{m_{st}}, \ (T_s - q^{2u_s})(T_s + q^{2v_s}) = 0 \ \forall s, t \in S\rangle.$$

Παραδείγματα:

Έστω $\mathbf{u} = (u_s)_{s \in S}$ μια οικογένεια ακεραίων με την ιδιότητα:

Αν $s, t \in S$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας W, τότε $u_s = u_t$.

Έστω $\mathbf{v} = (v_s)_{s \in S}$ μια δεύτερη οικογένεια ακεραίων με την παραπάνω ιδιότητα και q μια μεταβλητή. Η Iwahori-Hecke άλγεβρα $\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ του W είναι η $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-άλγεβρα με την εξής παράσταση:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \langle (T_s)_{s \in S} \mid \underbrace{T_s T_t T_s \ldots}_{m_{st}} = \underbrace{T_t T_s T_t \ldots}_{m_{st}}, \; (T_s - q^{2u_s})(T_s + q^{2v_s}) = 0 \; \forall s, t \in S \rangle.$$

Παραδείγματα:

1. $\mathcal{H}(G_2) = \left\langle T_s, T_t \;\middle|\; \begin{array}{l} T_s T_t T_s T_t T_s T_t = T_t T_s T_t T_s T_t T_s, \\ (T_s - q^{2u_s})(T_s + q^{2v_s}) = (T_t - q^{2u_t})(T_t + q^{2v_t}) = 0 \end{array} \right\rangle$

Έστω $\mathbf{u} = (u_s)_{s \in S}$ μια οικογένεια ακεραίων με την ιδιότητα:

> Αν $s, t \in S$ ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της ομάδας W, τότε $u_s = u_t$.

Έστω $\mathbf{v} = (v_s)_{s \in S}$ μια δεύτερη οικογένεια ακεραίων με την παραπάνω ιδιότητα και q μια μεταβλητή. Η Iwahori-Hecke άλγεβρα $\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$ του W είναι η $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-άλγεβρα με την εξής παράσταση:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \langle (T_s)_{s \in S} \mid \underbrace{T_s T_t T_s \ldots}_{m_{st}} = \underbrace{T_t T_s T_t \ldots}_{m_{st}}, \; (T_s - q^{2u_s})(T_s + q^{2v_s}) = 0 \; \forall s, t \in S \rangle.$$

Παραδείγματα:

1. $$\mathcal{H}(G_2) = \left\langle T_s, T_t \;\middle|\; \begin{array}{l} T_s T_t T_s T_t T_s T_t = T_t T_s T_t T_s T_t T_s, \\ (T_s - q^{2u_s})(T_s + q^{2v_s}) = (T_t - q^{2u_t})(T_t + q^{2v_t}) = 0 \end{array} \right\rangle$$

2. $$\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n) = \left\langle T_1, T_2, \ldots, T_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \\ T_i T_j = T_j T_i \text{ αν } |i - j| > 1, \\ (T_i - q^{2u})(T_i + q^{2v}) = 0 \end{array} \right\rangle$$

Θέτουμε $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$, $A := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ και $K := \mathbb{Q}(q)$.

Θέτουμε $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$, $A := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ και $K := \mathbb{Q}(q)$. Η άλγεβρα

$$K\mathcal{H} := K \otimes_A \mathcal{H}$$

είναι διαχωρίσιμη ημιαπλή.

Θέτουμε $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$, $A := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ και $K := \mathbb{Q}(q)$. Η άλγεβρα

$$K\mathcal{H} := K \otimes_A \mathcal{H}$$

είναι διαχωρίσιμη ημιαπλή. Από το Θεώρημα Παραμόρφωσης του Tits αποκτούμε μια αντιστοιχία

$$\mathrm{Irr}(K\mathcal{H}) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W).$$

Θέτουμε $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$, $A := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ και $K := \mathbb{Q}(q)$. Η άλγεβρα

$$K\mathcal{H} := K \otimes_A \mathcal{H}$$

είναι διαχωρίσιμη ημιαπλή. Από το Θεώρημα Παραμόρφωσης του Tits αποκτούμε μια αντιστοιχία

$$\mathrm{Irr}(K\mathcal{H}) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W).$$

Οπότε, αν Λ είναι ένα σύνολο που παραμετροποιεί το $\mathrm{Irr}(W)$,

$$\mathrm{Irr}(W) = \{E^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\},$$

Θέτουμε $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathbf{u},\mathbf{v}}$, $A := \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ και $K := \mathbb{Q}(q)$. Η άλγεβρα

$$K\mathcal{H} := K \otimes_A \mathcal{H}$$

είναι διαχωρίσιμη ημιαπλή. Από το Θεώρημα Παραμόρφωσης του Tits αποκτούμε μια αντιστοιχία

$$\mathrm{Irr}(K\mathcal{H}) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W).$$

Οπότε, αν Λ είναι ένα σύνολο που παραμετροποιεί το $\mathrm{Irr}(W)$,

$$\mathrm{Irr}(W) = \{E^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\},$$

τότε

$$\mathrm{Irr}(K\mathcal{H}) = \{V^{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\}.$$

Η συνάρτηση a

Έστω $w \in W$. Αν $w = s_1 s_2 \dots s_r$ $(s_i \in S)$ είναι μια μειωμένη έκφραση για το w, τότε θέτουμε

$$T_w := T_{s_1} T_{s_2} \dots T_{s_r}.$$

Η συνάρτηση a

Έστω $w \in W$. Αν $w = s_1 s_2 \dots s_r$ $(s_i \in S)$ είναι μια μειωμένη έκφραση για το w, τότε θέτουμε

$$T_w := T_{s_1} T_{s_2} \dots T_{s_r}.$$

Τα στοιχεία $(T_w)_{w \in W}$ αποτελούν βάση της άλγεβρας $\mathcal{H}$ ως A-πρότυπο.

Η συνάρτηση a

Έστω $w \in W$. Αν $w = s_1 s_2 \dots s_r$ ($s_i \in S$) είναι μια μειωμένη έκφραση για το w, τότε θέτουμε

$$T_w := T_{s_1} T_{s_2} \dots T_{s_r}.$$

Τα στοιχεία $(T_w)_{w \in W}$ αποτελούν βάση της άλγεβρας $\mathcal{H}$ ως A-πρότυπο.

Η γραμμική απεικόνιση $t : \mathcal{H} \to A$ με $t(T_w) = \begin{cases} 1, & \text{αν } w = 1 \\ 0, & \text{αν } w \neq 1 \end{cases}$ ικανοποιεί

$$t = \sum_{V^\lambda \in \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})} \frac{1}{s_\lambda} \chi_{V^\lambda}$$

όπου $s_\lambda \in A$ είναι το στοιχείο Schur του ανάγωγου χαρακτήρα χ_{V^λ}.

Η συνάρτηση a

Έστω $w \in W$. Αν $w = s_1 s_2 \ldots s_r$ $(s_i \in S)$ είναι μια μειωμένη έκφραση για το w, τότε θέτουμε

$$T_w := T_{s_1} T_{s_2} \ldots T_{s_r}.$$

Τα στοιχεία $(T_w)_{w \in W}$ αποτελούν βάση της άλγεβρας $\mathcal{H}$ ως A-πρότυπο.

Η γραμμική απεικόνιση $t : \mathcal{H} \to A$ με $t(T_w) = \begin{cases} 1, & \text{αν } w = 1 \\ 0, & \text{αν } w \neq 1 \end{cases}$ ικανοποιεί

$$t = \sum_{V^\lambda \in \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})} \frac{1}{s_\lambda} \chi_{V^\lambda}$$

όπου $s_\lambda \in A$ είναι το στοιχείο Schur του ανάγωγου χαρακτήρα χ_{V^λ}.

Ορίζουμε $a : \Lambda \to \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\lambda} \mapsto a_\lambda := \min\{\alpha \in \mathbb{N} \mid q^\alpha s_\lambda \in \mathbb{Z}[q]\}$.

Η συνάρτηση a

Έστω $w \in W$. Αν $w = s_1 s_2 \dots s_r$ $(s_i \in S)$ είναι μια μειωμένη έκφραση για το w, τότε θέτουμε

$$T_w := T_{s_1} T_{s_2} \dots T_{s_r}.$$

Τα στοιχεία $(T_w)_{w \in W}$ αποτελούν βάση της άλγεβρας $\mathcal{H}$ ως A-πρότυπο.

Η γραμμική απεικόνιση $t : \mathcal{H} \to A$ με $t(T_w) = \begin{cases} 1, & \text{αν } w = 1 \\ 0, & \text{αν } w \neq 1 \end{cases}$ ικανοποιεί

$$t = \sum_{V^{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathrm{Irr}(K\mathcal{H})} \frac{1}{s_{\boldsymbol{\lambda}}} \chi_{V^{\boldsymbol{\lambda}}}$$

όπου $s_{\boldsymbol{\lambda}} \in A$ είναι το στοιχείο Schur του ανάγωγου χαρακτήρα $\chi_{V^{\boldsymbol{\lambda}}}$.

Ορίζουμε $a : \Lambda \to \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\lambda} \mapsto a_{\boldsymbol{\lambda}} := \min\{\alpha \in \mathbb{N} \mid q^{\alpha} s_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbb{Z}[q]\}$.

Παράδειγμα: Αν $s_{\boldsymbol{\lambda}} = q^{-2} + q^{-1} + q^3$, τότε $a_{\boldsymbol{\lambda}} = 2$.

Ο πίνακας διάσπασης

Έστω $\theta : A \to L,\ q \mapsto \xi$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων, όπου L είναι το σώμα πηλίκων της εικόνας $\theta(A)$.

Ο πίνακας διάσπασης

Έστω $\theta : A \to L,\ q \mapsto \xi$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων, όπου L είναι το σώμα πηλίκων της εικόνας $\theta(A)$. Αν $L\mathcal{H} := L \otimes_A \mathcal{H}$, τότε $\mathrm{Irr}(L\mathcal{H}) = ?$

Ο πίνακας διάσπασης

Έστω $\theta : A \to L$, $q \mapsto \xi$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων, όπου L είναι το σώμα πηλίκων της εικόνας $\theta(A)$. Αν $L\mathcal{H} := L \otimes_A \mathcal{H}$, τότε $\mathrm{Irr}(L\mathcal{H}) = ?$

Έστω $R_0(K\mathcal{H})$ (αντ. $R_0(L\mathcal{H})$) η ομάδα Grothendieck των πεπερασμένα παραγόμενων $K\mathcal{H}$-προτύπων (αντ. $L\mathcal{H}$-προτύπων), η οποία παράγεται από τις κλάσεις ισομορφίας $[U]$ των απλών $K\mathcal{H}$-προτύπων (αντ. $L\mathcal{H}$-προτύπων) U.

Ο πίνακας διάσπασης

Έστω $\theta : A \to L$, $q \mapsto \xi$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων, όπου L είναι το σώμα πηλίκων της εικόνας $\theta(A)$. Αν $L\mathcal{H} := L \otimes_A \mathcal{H}$, τότε $\mathrm{Irr}(L\mathcal{H}) = ?$

Έστω $R_0(K\mathcal{H})$ (αντ. $R_0(L\mathcal{H})$) η ομάδα Grothendieck των πεπερασμένα παραγόμενων $K\mathcal{H}$-προτύπων (αντ. $L\mathcal{H}$-προτύπων), η οποία παράγεται από τις κλάσεις ισομορφίας $[U]$ των απλών $K\mathcal{H}$-προτύπων (αντ. $L\mathcal{H}$-προτύπων) U.

Έχουμε μια απεικόνιση διάσπασης $d_\theta : R_0(K\mathcal{H}) \to R_0(L\mathcal{H})$ τέτοια ώστε, για κάθε $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, έχουμε

$$d_\theta([V^{\boldsymbol{\lambda}}]) = \sum_{N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})} [V^{\boldsymbol{\lambda}} : N][N].$$

Ο πίνακας διάσπασης

Έστω $\theta : A \to L$, $q \mapsto \xi$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων, όπου L είναι το σώμα πηλίκων της εικόνας $\theta(A)$. Αν $L\mathcal{H} := L \otimes_A \mathcal{H}$, τότε $\mathrm{Irr}(L\mathcal{H}) = ?$

Έστω $R_0(K\mathcal{H})$ (αντ. $R_0(L\mathcal{H})$) η ομάδα Grothendieck των πεπερασμένα παραγόμενων $K\mathcal{H}$-προτύπων (αντ. $L\mathcal{H}$-προτύπων), η οποία παράγεται από τις κλάσεις ισομορφίας $[U]$ των απλών $K\mathcal{H}$-προτύπων (αντ. $L\mathcal{H}$-προτύπων) U.

Έχουμε μια απεικόνιση διάσπασης $d_\theta : R_0(K\mathcal{H}) \to R_0(L\mathcal{H})$ τέτοια ώστε, για κάθε $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, έχουμε

$$d_\theta([V^{\boldsymbol{\lambda}}]) = \sum_{N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})} [V^{\boldsymbol{\lambda}} : N][N].$$

Ο πίνακας

$$D_\theta = \big([V^{\boldsymbol{\lambda}} : N]\big)_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda,\, N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})}$$

λέγεται πίνακας διάσπασης ως προς θ.

Βασικά σύνολα

Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς την απεικόνιση $\theta : A \to L$ αν και μόνο αν οι δύο παρακάτω συνθήκες ισχύουν:

Βασικά σύνολα

Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς την απεικόνιση $\theta : A \to L$ αν και μόνο αν οι δύο παρακάτω συνθήκες ισχύουν:

1. Για κάθε $N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})$, υπάρχει $\boldsymbol{\lambda}_N \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

Βασικά σύνολα

Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς την απεικόνιση $\theta : A \to L$ αν και μόνο αν οι δύο παρακάτω συνθήκες ισχύουν:

1. Για κάθε $N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})$, υπάρχει $\boldsymbol{\lambda}_N \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε
   - $[V^{\boldsymbol{\lambda}_N} : N] = 1$, και

Βασικά σύνολα

Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς την απεικόνιση $\theta : A \to L$ αν και μόνο αν οι δύο παρακάτω συνθήκες ισχύουν:

1. Για κάθε $N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})$, υπάρχει $\boldsymbol{\lambda}_N \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε
   - $[V^{\boldsymbol{\lambda}_N} : N] = 1$, και
   - αν $[V^{\boldsymbol{\mu}} : N] \neq 0$, τότε είτε $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$ είτε $a_{\boldsymbol{\mu}} > a_{\boldsymbol{\lambda}_N}$.

Βασικά σύνολα

Λέμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς την απεικόνιση $\theta : A \to L$ αν και μόνο αν οι δύο παρακάτω συνθήκες ισχύουν:

1. Για κάθε $N \in \mathrm{Irr}(L\mathcal{H})$, υπάρχει $\boldsymbol{\lambda}_N \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε
   - $[V^{\boldsymbol{\lambda}_N} : N] = 1$, και
   - αν $[V^{\boldsymbol{\mu}} : N] \neq 0$, τότε είτε $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$ είτε $a_{\boldsymbol{\mu}} > a_{\boldsymbol{\lambda}_N}$.
2. Η απεικόνιση
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}(L\mathcal{H}) & \to & \mathcal{B} \\ N & \mapsto & \boldsymbol{\lambda}_N \end{array}$$
είναι $1-1$ και επί.

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,
- από τους Geck & Jacon, όταν $u_s \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$.

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,
- από τους Geck & Jacon, όταν $u_s \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$.

Θεώρημα (Χλουβεράκη-Jacon)

Έστω L ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο ως προς κάθε $\theta : A \to L$.

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,
- από τους Geck & Jacon, όταν $u_s \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$.

Θεώρημα (Χλουβεράκη-Jacon)

Έστω L ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο ως προς κάθε $\theta : A \to L$.

Ιδέα της απόδειξης: Έστω $s \in S$. Αν $u_s \geq v_s$, τότε

$$(u_s - v_s, 0) \to (u_s, v_s),$$

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,
- από τους Geck & Jacon, όταν $u_s \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$.

Θεώρημα (Χλουβεράκη-Jacon)

Έστω L ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο ως προς κάθε $\theta : A \to L$.

Ιδέα της απόδειξης: Έστω $s \in S$. Αν $u_s \geq v_s$, τότε

$$(u_s - v_s, 0) \to (u_s, v_s),\ \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}.$$

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,
- από τους Geck & Jacon, όταν $u_s \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$.

Θεώρημα (Χλουβεράκη-Jacon)

Έστω L ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο ως προς κάθε $\theta : A \to L$.

Ιδέα της απόδειξης: Έστω $s \in S$. Αν $u_s \geq v_s$, τότε

$$(u_s - v_s, 0) \to (u_s, v_s), \ \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}.$$

Αν $u_s < v_s$, τότε

$$(v_s - u_s, 0) \to (0, v_s - u_s) \to (u_s, v_s),$$

Αν το σώμα L είναι χαρακτηριστικής 0, τότε η ύπαρξη κανονικών βασικών συνόλων έχει αποδειχθεί για όλες τις ομάδες Weyl

- από τους Geck & Rouquier, όταν $u_s = c \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$,
- από τους Geck & Jacon, όταν $u_s \in \mathbb{N}$ και $v_s = 0$ για κάθε $s \in S$.

Θεώρημα (Χλουβεράκη-Jacon)

Έστω L ένα σώμα χαρακτηριστικής 0. Η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο ως προς κάθε $\theta : A \to L$.

Ιδέα της απόδειξης: Έστω $s \in S$. Αν $u_s \geq v_s$, τότε

$$(u_s - v_s, 0) \to (u_s, v_s),\ \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}.$$

Αν $u_s < v_s$, τότε

$$(v_s - u_s, 0) \to (0, v_s - u_s) \to (u_s, v_s),\ \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^{\varepsilon} = \{\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}) \,|\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{B}\}$$

όπου $\varepsilon : \Lambda \to \Lambda$ είναι μια αντιστοιχία που προέρχεται από τη δράση της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ πάνω στο σύνολο $\mathrm{Irr}(K\mathcal{H})$.

Ένα παράδειγμα: η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$

Έστω ότι W είναι η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$ και S είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων $s_i := (i, i+1)$ για $i = 1, \ldots, n-1$.

Ένα παράδειγμα: η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$

Έστω ότι W είναι η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$ και S είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων $s_i := (i, i+1)$ για $i = 1, \ldots, n-1$. Όλα τα στοιχεία του S ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$.

Ένα παράδειγμα: η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$

Έστω ότι W είναι η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$ και S είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων $s_i := (i, i+1)$ για $i = 1, \ldots, n-1$. Όλα τα στοιχεία του S ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$. Οι γεννήτορες της Iwahori-Hecke άλγεβρας $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n)$ ικανοποιούν

$$(T_s - q^{2u})(T_s + q^{2v}) = 0, \;\; \forall s \in S$$

για κάποιους ακεραίους u, v.

Ένα παράδειγμα: η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$

Έστω ότι W είναι η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$ και S είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων $s_i := (i, i+1)$ για $i = 1, \ldots, n-1$. Όλα τα στοιχεία του S ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$. Οι γεννήτορες της Iwahori-Hecke άλγεβρας $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n)$ ικανοποιούν

$$(T_s - q^{2u})(T_s + q^{2v}) = 0, \ \forall s \in S$$

για κάποιους ακεραίους u, v.

Το σύνολο Λ που παραμετροποιεί τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{S}_n$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{P}(n) := \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \;\middle|\; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1 \text{ και } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n \right\}$$

των διαμερίσεων του n.

Ένα παράδειγμα: η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$

Έστω ότι W είναι η ομάδα μεταθέσεων $\mathfrak{S}_n$ και S είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων $s_i := (i, i+1)$ για $i = 1, \ldots, n-1$. Όλα τα στοιχεία του S ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας της $\mathfrak{S}_n$. Οι γεννήτορες της Iwahori-Hecke άλγεβρας $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n)$ ικανοποιούν

$$(T_s - q^{2u})(T_s + q^{2v}) = 0, \ \forall s \in S$$

για κάποιους ακεραίους u, v.

Το σύνολο Λ που παραμετροποιεί τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{S}_n$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{P}(n) := \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \;\middle|\; \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1 \text{ και } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n \right\}$$

των διαμερίσεων του n. Η αντιστοιχία $\varepsilon : \Lambda \to \Lambda$ που προέρχεται από τη δράση της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ στέλνει κάθε διαμέριση του n στη συζυγή της.

Πρόταση (Dipper-James, Χ.-Jacon)

Έστω $\theta : \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \to L$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων τέτοιος ώστε το στοιχείο $\theta(q)^{2u-2v}$ είναι μια πρωταρχική ρίζα της μονάδας τάξης $e > 1$.

Πρόταση (Dipper-James, X.-Jacon)

Έστω $\theta : \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \to L$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων τέτοιος ώστε το στοιχείο $\theta(q)^{2u-2v}$ είναι μια πρωταρχική ρίζα της μονάδας τάξης $e > 1$.

1. Αν $u > v$, τότε η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς θ και έχουμε

$$\mathcal{B} = \mathrm{Reg}_e(n)$$

όπου το σύνολο $\mathrm{Reg}_e(n)$ των e-κανονικών διαμερίσεων ορίζεται ως

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \notin \mathrm{Reg}_e(n) \iff \exists i \in \mathbb{N},\ \lambda_i = \cdots = \lambda_{i+e-1} \neq 0.$$

Πρόταση (Dipper-James, X.-Jacon)

Έστω $\theta : \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \to L$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων τέτοιος ώστε το στοιχείο $\theta(q)^{2u-2v}$ είναι μια πρωταρχική ρίζα της μονάδας τάξης $e > 1$.

1. Αν $u > v$, τότε η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς θ και έχουμε
$$\mathcal{B} = \mathrm{Reg}_e(n)$$
όπου το σύνολο $\mathrm{Reg}_e(n)$ των *e-κανονικών διαμερίσεων* ορίζεται ως
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \notin \mathrm{Reg}_e(n) \iff \exists i \in \mathbb{N},\ \lambda_i = \cdots = \lambda_{i+e-1} \neq 0.$$

2. Αν $u < v$, τότε η άλγεβρα $\mathcal{H}$ διαθέτει ένα κανονικό βασικό σύνολο $\mathcal{B} \subset \Lambda$ ως προς θ και έχουμε
$$\mathcal{B} = \mathrm{Res}_e(n)$$
όπου το σύνολο $\mathrm{Res}_e(n)$ των *e-περιορισμένων διαμερίσεων* ορίζεται ως
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathrm{Res}_e(n) \iff \forall i \in \mathbb{N},\ \lambda_i - \lambda_{i+1} < e.$$

Εφαρμογή για $n = 4$

Εφαρμογή για $n = 4$

Έστω $W = \mathfrak{S}_4$, $L = \mathbb{Q}(i)$ και $\theta(q) = i$.

Εφαρμογή για $n = 4$

Έστω $W = \mathfrak{S}_4$, $L = \mathbb{Q}(i)$ και $\theta(q) = i$.

- Αν $u = 1$ και $v = 0$, τότε $e = 2$ και έχουμε τον εξής πίνακα διάσπασης:

$\boldsymbol{\lambda}$	$a_{\boldsymbol{\lambda}}$	D_θ	
(4)	0	1	0
$(3,1)$	2	1	1
$(2,2)$	4	0	1
$(2,1,1)$	6	1	1
$(1,1,1,1)$	12	1	0

Εφαρμογή για $n = 4$

Έστω $W = \mathfrak{S}_4$, $L = \mathbb{Q}(i)$ και $\theta(q) = i$.

- Αν $u = 1$ και $v = 0$, τότε $e = 2$ και έχουμε τον εξής πίνακα διάσπασης:

λ	a_λ	D_θ	
(4)	0	1	0
$(3,1)$	2	1	1
$(2,2)$	4	0	1
$(2,1,1)$	6	1	1
$(1,1,1,1)$	12	1	0

- Αν $u = -1$ και $v = 0$, τότε $e = 2$ και έχουμε τον εξής πίνακα διάσπασης:

λ	a_λ	D_θ	
$(1,1,1,1)$	0	1	0
$(2,1,1)$	2	1	1
$(2,2)$	4	0	1
$(3,1)$	6	1	1
(4)	12	1	0