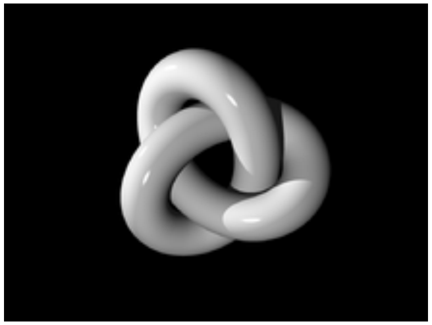
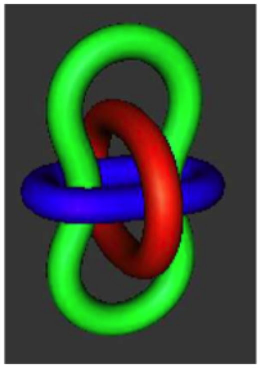
Algèbres de Yokonuma-Hecke et invariants de nœuds

MARIA CHLOUVERAKI

Université de Versailles - St Quentin

Un noeud (resp. un entrelac) est un plongement du circle S^1 (resp. n copies de S^1) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

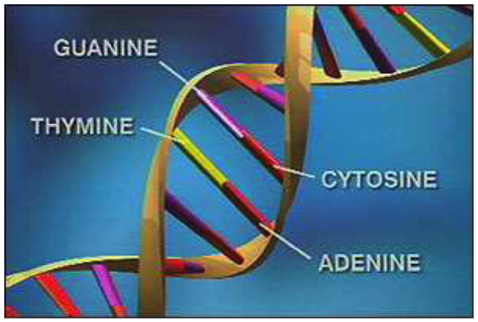


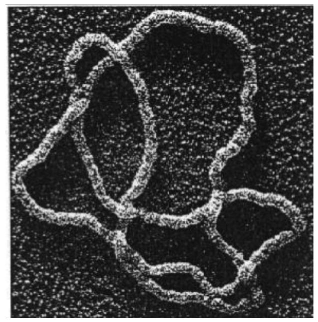


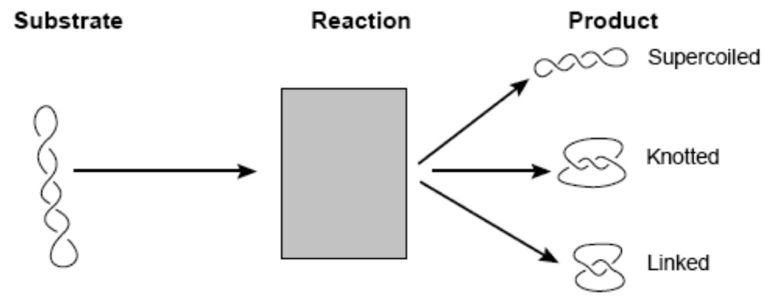
Tout noeud ou entrelac peut être représenté par un diagramme :

Applications de la théorie des noeuds

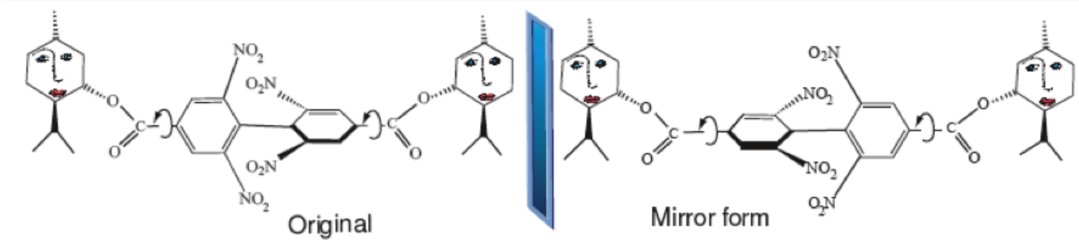
1) ADN, enzymes et protéines



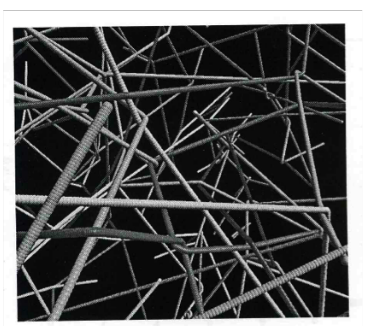




2) Molecules



3) Polymères

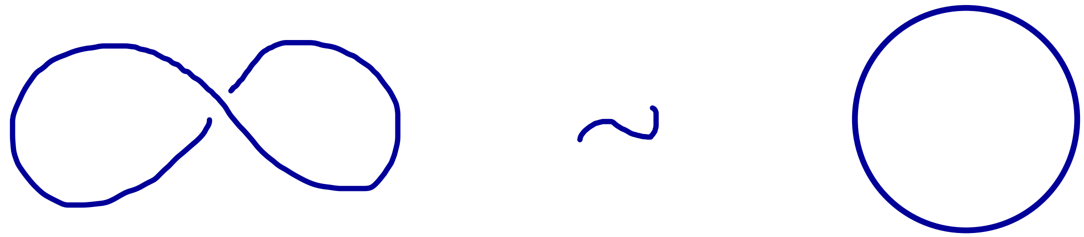


Topological Analysis of Linear Polymer Melts

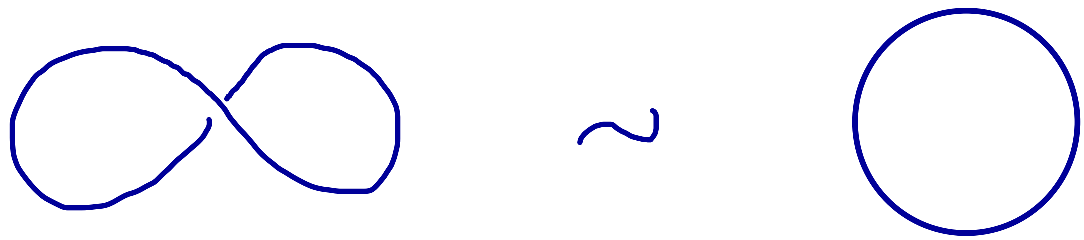
Christos Tzoumanekas* and Doros N. Theodorou†
Department of Materials Science and Engineering, School of Chemical Engineering, National Technical University of Athens, Zografou Campus, 15780 Athens, Greece and Dutch Polymer Institute (DPI), The Netherlands
(Dated: 21st September 2005)

We introduce an algorithm for the reduction of computer generated atomistic polymer samples to networks of primitive paths. By examining network ensembles of Polyethylene and cis-1,4 Polybutadiene melts, we quantify the underlying topologies through the radial distribution function of entanglements and the distribution of the number of monomers between entanglements. A suitable scaling of acquired data leads to a unifying microscopic topological description of both melts.

Deux noeuds (ou entrelacs) sont équivalents s'il existe une isotopie entre eux.

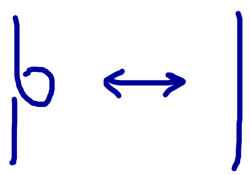


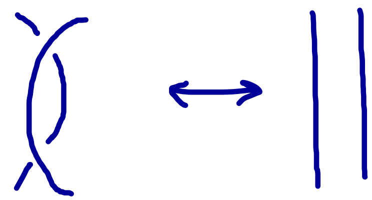
Deux noeuds (ou entrelacs) sont **équivalents** s'il existe une isotopie entre eux.

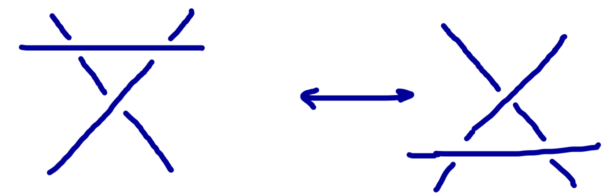


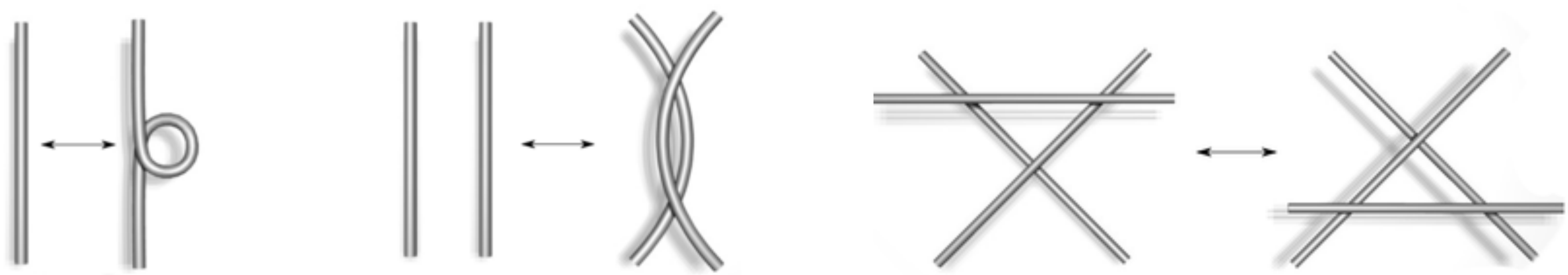
Q. Quand est-ce que 2 diagrammes représentent le même noeud?

<u>Théorème (Reidemeister 1927)</u> : Deux noeuds K_1, K_2 sont équivalents si et seulement si le diagramme de K_2 peut être obtenu du diagramme de K_1 via un nombre fini de mouvements suivants :

I. 

II. 

III. 



Si K_1, K_2 sont équivalents, nous écrivons $K_1 \sim K_2$.

$\mathcal{L}$ = ensemble des noeuds ou entrelacs

S = un ensemble

Un invariant de noeuds est une fonction $I : \mathcal{L} \longrightarrow S$ telle que

$$K_1 \sim K_2 \implies I(K_1) = I(K_2)$$

pour $K_1, K_2 \in \mathcal{L}$, i.e.,

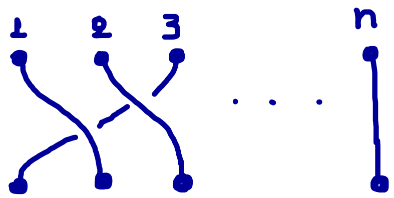
$$I(K_1) \neq I(K_2) \implies K_1 \nsim K_2$$

Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, \ldots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{if } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

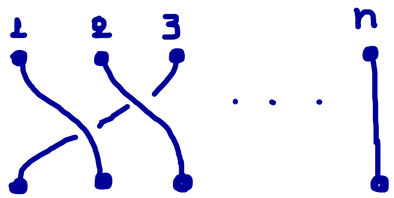
Groupe de tresses

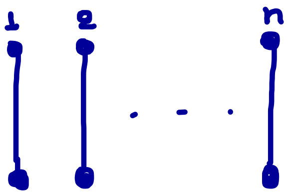
$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{if } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

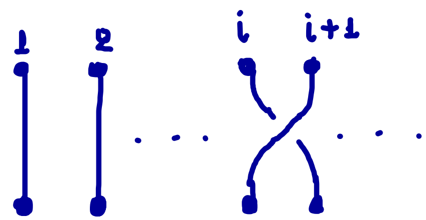


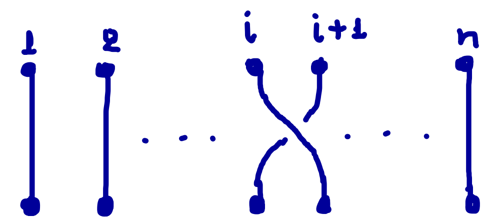
Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1,\dots,\sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & i=1,\dots,n-2 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{if } |i-j|>1 \end{array} \right\rangle$$



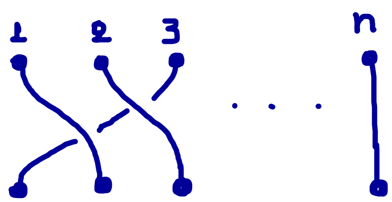
$\mathrm{Id} =$ 

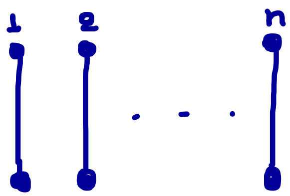
$\sigma_i =$ 

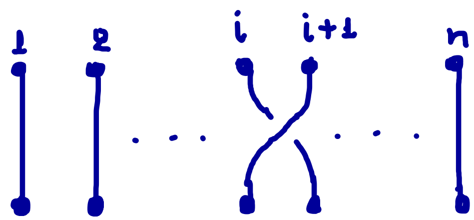
$\sigma_i^{-1} =$ 

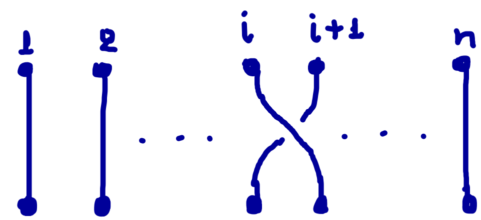
Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1,\dots,\sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & i=1,\dots,n-2 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{if } |i-j|>1 \end{array} \right\rangle$$

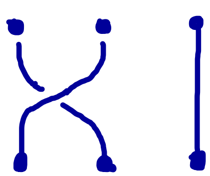


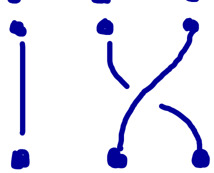
$\mathrm{Id} =$ 

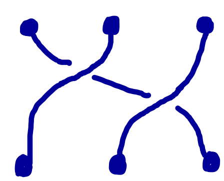
$\sigma_i =$ 

$\sigma_i^{-1} =$ 

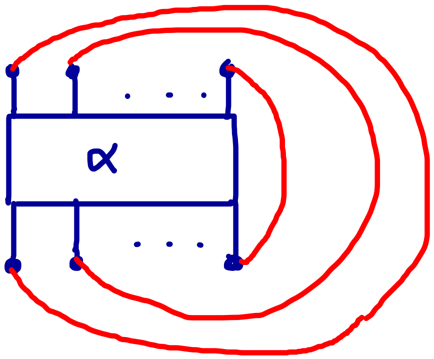
Multiplication : concaténation de diagrammes

Ex. $\alpha = \sigma_1 =$ 

$\beta = \sigma_2 =$ 

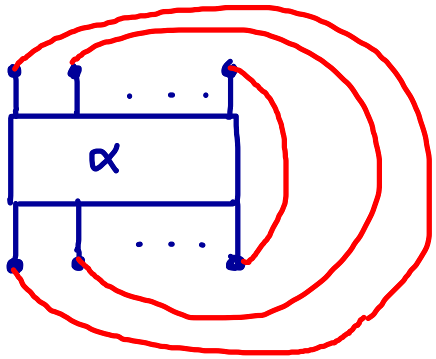
$\Rightarrow \alpha\beta = \sigma_1\sigma_2 =$ 

Tout élément de B_n produit un noeud ou un entrelac :

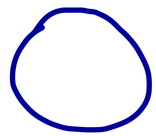


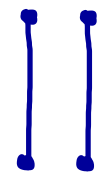
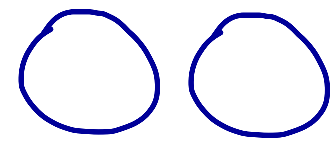
$=: \hat{\alpha} =$ clôture de α

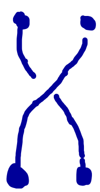
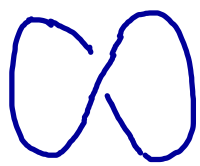
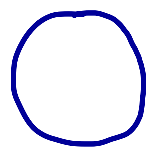
Tout élément de B_n produit un noeud ou un entrelac :

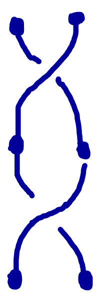
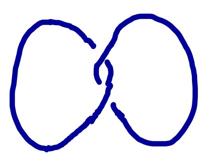
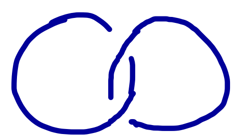


$=: \hat{\alpha}$ = clôture de α

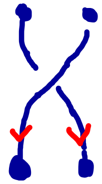
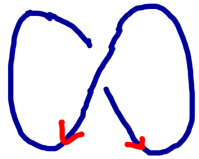
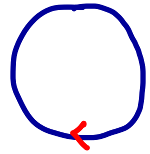
<u>Ex.</u> $\alpha =$  $\hat{\alpha} =$ 

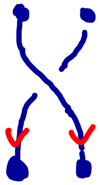
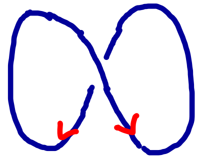
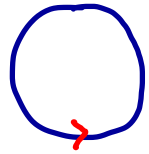
$\alpha =$  $\hat{\alpha} =$ 

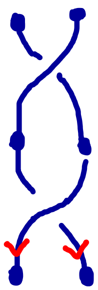
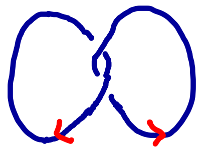
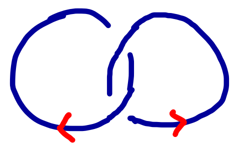
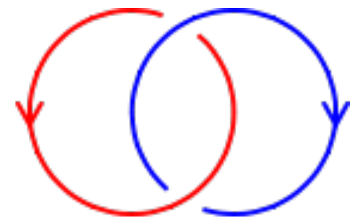
$\alpha = \sigma_1 =$  $\hat{\alpha} =$  $\sim$ 

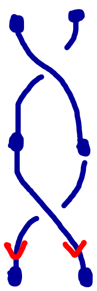
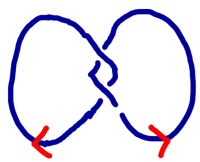
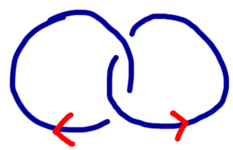
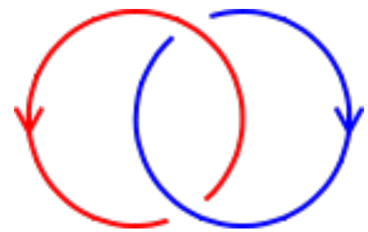
$\alpha = \sigma_1^2 =$  $\hat{\alpha} =$  $\sim$ 

$\alpha = \sigma_1^3$ $\hat{\alpha}$ = trèfle à droite

$\alpha = \sigma_1 =$  $\hat{\alpha} =$  $\sim$ 

$\alpha = \sigma_1^{-1} =$  $\hat{\alpha} =$  $\sim$ 

$\alpha = \sigma_1^{2} =$  $\hat{\alpha} =$  $\sim$  

$\alpha = \sigma_1^{-2} =$  $\hat{\alpha} =$  $\sim$  

$\alpha = \sigma_1^{3}$ $\hat{\alpha} =$ trèfle à droite 

$\alpha = \sigma_1^{-3}$ $\hat{\alpha} =$ trèfle à gauche 

Théorème d'Alexander (1923)

Tout noeud ou entrelac peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigsqcup_{n \geqslant 1} B_n$

Théorème d'Alexander (1923)

Tout noeud ou entrelac peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

Définissons une relation d'équivalence sur $\bigsqcup_{n \geq 1} B_n$ comme la clôture transitive des relations :

(i) $\alpha\beta \sim \beta\alpha$, $\alpha, \beta \in B_n$ (conjugaison)

(ii) $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$, $\alpha \in B_n$ (mouvement de Markov)

Théorème d'Alexander (1923)

Tout noeud ou entrelac peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigsqcup_{n\geq 1} B_n$

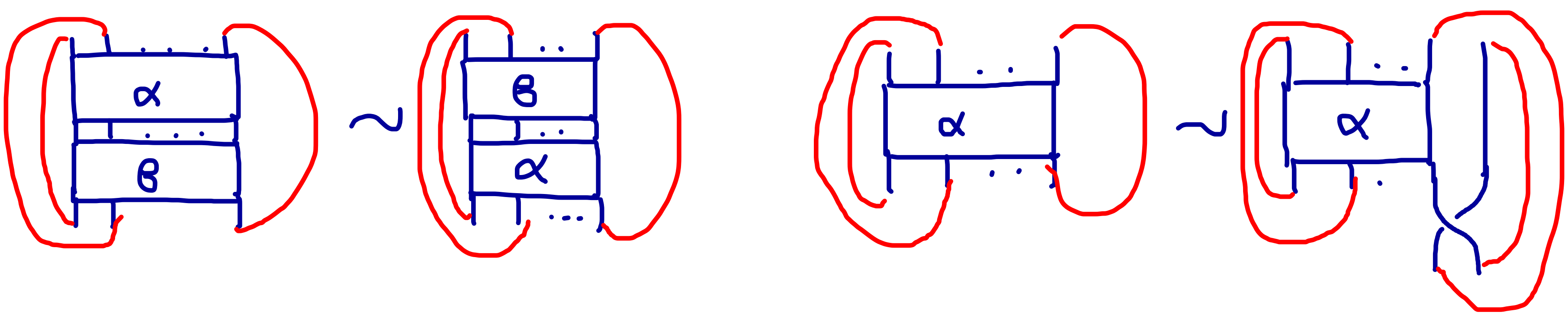
Définissons une relation d'équivalence sur $\bigsqcup_{n\geq 1} B_n$ comme la clôture transitive des relations :

(i) $\alpha\beta \sim \beta\alpha$, $\alpha, \beta \in B_n$ (conjugaison)

(ii) $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$, $\alpha \in B_n$ (mouvement de Markov)

Théorème de Markov (1935)

Nous avons $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ si et seulement si $\alpha \sim \beta$.



Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \ldots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if} \quad |i-j| > 1 \\ G_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $R[B_n]$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $R[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $R[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q)\mathcal{H}_n(q)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(S_n) \longleftrightarrow \{\text{partitions de } n\} =: \mathcal{P}(n)$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j|>1 \\ G_i^2 = 1 + (q-q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $R[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q)\mathcal{H}_n(q)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(S_n) \longleftrightarrow \{\text{partitions de } n\} =: \mathcal{P}(n)$
- $\mathcal{H}_n(q)$ est un R-module libre de rang $n! = |S_n|$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $R[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q)\mathcal{H}_n(q)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(S_n) \longleftrightarrow \{\text{partitions de } n\} =: \mathcal{P}(n)$
- $\mathcal{H}_n(q)$ est un R-module libre de rang $n! = |S_n|$
- $G_i^{-1} = G_i - (q - q^{-1}) \quad \forall\, i = 1, \dots, n-1$.

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) G_i \end{array} \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $R[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q)\mathcal{H}_n(q)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(S_n) \longleftrightarrow \{\text{partitions de } n\} =: \mathcal{P}(n)$
- $\mathcal{H}_n(q)$ est un R-module libre de rang $n! = |S_n|$
- $G_i^{-1} = G_i - (q - q^{-1}) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n-1.$

$$\boxed{\mathbb{C} = \mathcal{H}_1(q) \subset \mathcal{H}_2(q) \subset \cdots \subset \mathcal{H}_n(q) \subset \mathcal{H}_{n+1}(q) \subset \cdots}$$

Théorème (Jones - Ocneanu 1987)

Soit z une indéterminée. Il existe une unique application linéaire $\tau : \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow R[z]$, telle que

- $\tau(1) = 1$
- $\tau(ab) = \tau(ba) \qquad \forall\ a,b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau(aG_n) = z\,\tau(a) \qquad \forall\ a \in \mathcal{H}_n(q)$

Théorème (Jones - Ocneanu 1987)

Soit ζ une indéterminée. Il existe une unique application linéaire $\tau : \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow R[\zeta]$, telle que

- $\tau(1) = 1$
- $\tau(ab) = \tau(ba) \qquad \forall\, a,b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau(aG_n) = \zeta\,\tau(a) \qquad \forall\, a \in \mathcal{H}_n(q)$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} B_n & \hookrightarrow & R[B_n] & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & R[\zeta] \\ \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & G_i & & \end{array}}$$

Théorème (Jones - Ocneanu 1987)

Soit ζ une indéterminée. Il existe une unique application linéaire $\tau : \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow R[\zeta]$, telle que

- $\tau(1) = 1$
- $\tau(ab) = \tau(ba) \qquad \forall\, a,b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau(aG_n) = \zeta\tau(a) \qquad \forall\, a \in \mathcal{H}_n(q)$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} B_n & \hookrightarrow & R[B_n] & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & R[\zeta] \\ \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & G_i & & \end{array}}$$

Pour $\alpha \in B_n$, $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}\lambda(\alpha)\,\tau(\alpha)$ avec $\Lambda, \lambda(\alpha) \in \mathbb{C}(q,\zeta)$

On trouve Λ, $\lambda(\alpha)$ en imposant $P(\alpha) = P(\alpha\sigma_n) = P(\alpha\sigma_n^{-1})$

Théorème (Jones-Ocneanu 1987)

Soit z une indéterminée. Il existe une unique application linéaire $\tau : \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow R[z]$, telle que

- $\tau(1) = 1$
- $\tau(ab) = \tau(ba) \quad \forall\, a,b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau(aG_n) = z\,\tau(a) \quad \forall\, a \in \mathcal{H}_n(q)$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} B_n & \hookrightarrow & R[B_n] & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & R[z] \\ \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & G_i & & \end{array}}$$

Pour $\alpha \in B_n$, $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}\lambda(\alpha)\,\tau(\alpha)$ avec $\Lambda, \lambda(\alpha) \in \mathbb{C}(q,z)$

On trouve Λ, $\lambda(\alpha)$ en imposant $P(\alpha) = P(\alpha\sigma_n) = P(\alpha\sigma_n^{-1})$

P est le polynôme de HOMFLYPT (Jones à 2 variables q, z)

On peut aussi définir P diagrammatiquement :

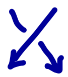
- $P(\bigcirc) = 1$

- $$\boxed{\gamma\, P(\swarrow\!\!\!\!\searrow) - \gamma^{-1}\, P(\swarrow\!\!\!\!\searrow) = (q-q^{-1})\, P(\downarrow\downarrow)}$$

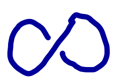
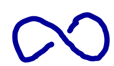
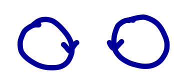
où $\gamma := \zeta\Lambda$ Relation d'écheveau

On peut aussi définir P diagrammatiquement :

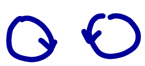
- $P($  $) = 1$

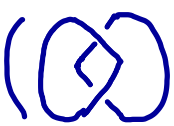
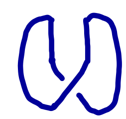
- $\gamma \, P($  $) - \gamma^{-1} P($  $) = (q-q^{-1}) \, P(\downarrow\downarrow)$

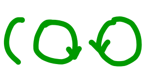
où $\gamma := \zeta \Lambda$ — Relation d'écheveau

Ex. γ $P($  $)$ $-$ γ^{-1} $P($  $)$ $= (q-q^{-1}) \, P($  $)$

$= 1$ $\qquad$ $= 1$

$\Rightarrow P($  $) = \ldots\ldots$

γ $P($  $)$ $-$ γ^{-1} $P($  $)$ $= (q-q^{-1}) \, P($  $)$

$P($  $)$ $\qquad$ $= 1$

$\Rightarrow \ldots\ldots$

Groupe de tresses à poids

Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, t_1, \ldots, t_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i \quad \text{comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j = 1, \ldots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i,j = 1, \ldots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

$$\parallel$$

$$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$$

où $\quad s_i = (i, i+1) \in S_n$

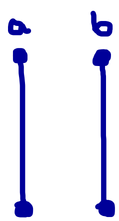
Groupe de tresses à poids

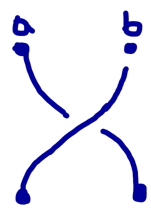
Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

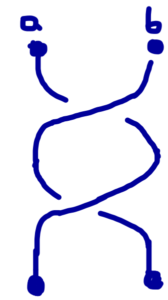
$$\begin{array}{c}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\ \shortparallel \\ (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n\end{array} = \left\langle \sigma_1,\dots,\sigma_{n-1},t_1,\dots,t_n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i & \text{comme avant} \\ t_j^d = 1 & j=1,\dots,n \\ t_i t_j = t_j t_i & i,j=1,\dots,n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} & \end{array} \right\rangle$$

où $s_i = (i, i+1) \in S_n$

Ex. $a, b \in \{0,1,\dots,d-1\}$, $n=2$

$t_1^a t_2^b =$ 

$t_1^a t_2^b \sigma_1 =$ 

$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 =$ 

Groupe de tresses à poids

Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

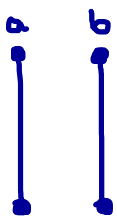
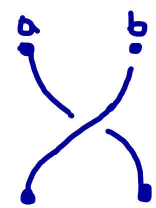
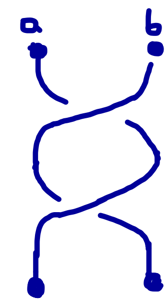
$$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i & \text{comme avant} \\ t_j^d = 1 & j = 1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i & i, j = 1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} & \end{array} \right\rangle$$

$$\shortparallel$$

$$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$$

où $\quad s_i = (i, i+1) \in S_n$

<u>Ex.</u> $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $n = 2$

$t_1^a t_2^b =$  $\qquad t_1^a t_2^b \sigma_1 =$  $\qquad t_1^a t_2^b \sigma_1^2 =$ 

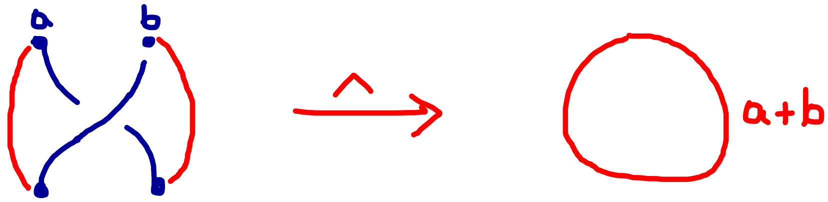
Multiplication : concaténation de diagrammes

<u>Ex.</u> $(t_1^a t_2^b \sigma_1) \cdot (t_1^{a'} t_2^{b'}) = t_1^{a+b'} t_2^{b+a'} \sigma_1$

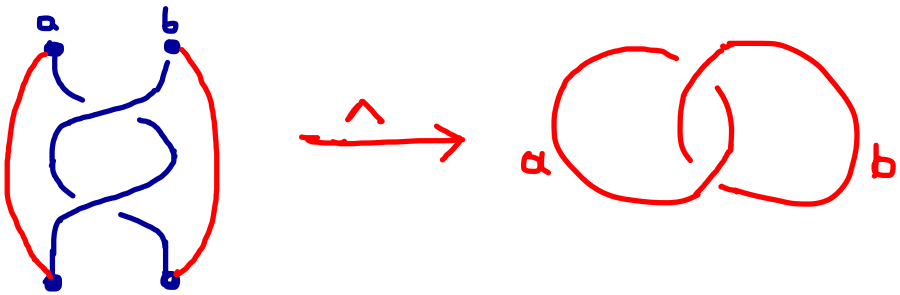
Tout élément de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})\wr B_n$ produit un noeud ou un entrelac à poids

Ex. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $n = 2$

$t_1^a t_2^b \sigma_1 =$

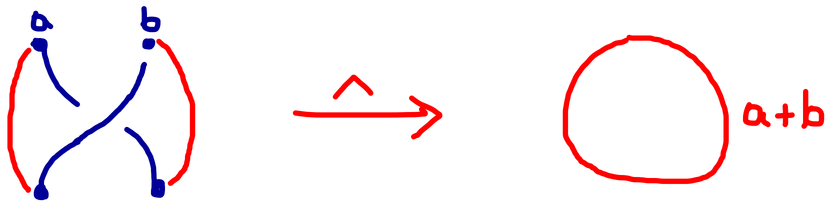


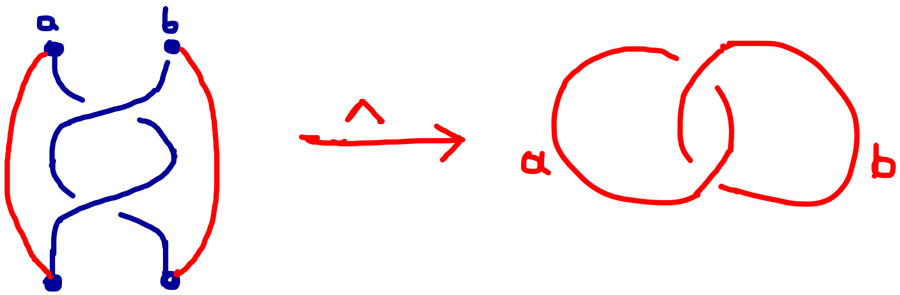
$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 =$



Tout élément de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$ produit un noeud ou un entrelac à poids

<u>Ex.</u> $a, b \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, $n = 2$

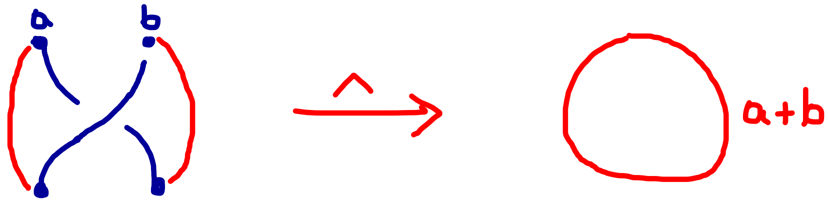
$t_1^a t_2^b \sigma_1 =$ 

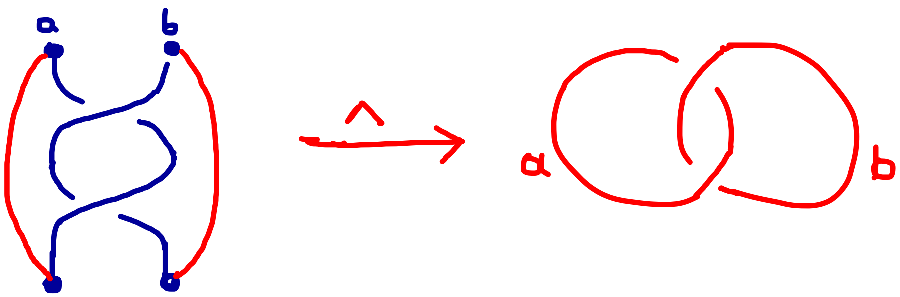
$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 =$ 

$d = 3$: $\widehat{t_1 t_2 \sigma_1} \sim \widehat{t_1^2 \sigma_1}$, $\widehat{t_1 t_2 \sigma_1^2} \not\sim \widehat{t_1^2 \sigma_1^2}$

Tout élément de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$ produit un noeud ou un entrelac à poids

Ex. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $n = 2$

$t_1^a t_2^b \sigma_1 =$ 

$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 =$ 

$d = 3$: $\widehat{t_1 t_2 \sigma_1} \sim \widehat{t_1^2 \sigma_1}$, $\widehat{t_1 t_2 \sigma_1^2} \not\sim \widehat{t_1^2 \sigma_1^2}$

Théorème d'Alexander : évident

Théorème de Markov : Ko - Smolinsky 1992

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i e_i \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{matrix} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1 \quad , \; t_i t_j = t_j t_i \quad , \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i e_i \end{matrix} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $R[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$

Algèbre de Yokonuma-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{matrix} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i e_i \end{matrix} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $R[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$: $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$, où $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{matrix} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i e_i \end{matrix} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $R[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$: $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$, où $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$: $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$

Algèbre de Yokonuma-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{matrix} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j|>1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i e_i \end{matrix} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $R[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$: $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$, où $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$: $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $Y_{d,n}(q)$ $\quad (t_j \longmapsto 1)$

Algèbre de Yokonuma-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{matrix} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if} \quad |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1 \quad , \; t_i t_j = t_j t_i \quad , \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = 1 + (q - q^{-1}) g_i e_i \end{matrix} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $R[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$: $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$, où $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$: $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $Y_{d,n}(q)$ $\quad (t_j \longmapsto 1)$
- $Y_{d,n}(q)$ est un R-module libre de rang $d^n \cdot n! = |G(d,1,n)|$

Algèbre de Yokonuma-Hecke de type A

q indéterminée, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j|>1 \\ t_j^d = 1 \quad , t_i t_j = t_j t_i \quad , \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ \qquad g_i^2 = 1 + (q-q^{-1}) g_i e_i \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $R[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$: $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$, où $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$: $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $Y_{d,n}(q)$ $\quad (t_j \longmapsto 1)$
- $Y_{d,n}(q)$ est un R-module libre de rang $d^n \cdot n! = |G(d,1,n)|$
- $g_i^{-1} = g_i - (q-q^{-1}) e_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n-1$

Théorie des représentations de $Y_{d,n}(q)$

$$\mathrm{Irr}\left(\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)\right) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}\left(G(d,1,n)\right) \longleftrightarrow \{\, d\text{-partitions de } n \,\} =: \mathcal{P}(d,n)$$

Une d-partition est une famille de d partitions $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) = \lambda$ avec $\lambda_i \in \mathcal{P}(m_i)$ et $\sum_{i=1}^{d} m_i = n$.

Théorie des représentations de $Y_{d,n}(q)$

$$\mathrm{Irr}\,(\mathbb{C}(q)Y_{d,n}(q)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}\,(G(d,1,n)) \longleftrightarrow \{\text{d-partitions de } n\} =: \mathcal{P}(d,n)$$

Une **d-partition** est une famille de d partitions $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) = \lambda$ avec $\lambda_i \in \mathcal{P}(m_i)$ et $\sum_{i=1}^{d} m_i = n$.

C.-Poulain d'Andecy (2014)

- Formules explicites en termes de multitableaux
- Définition des éléments de Jucys-Murphy
- Critère de semisimplicité
- Théorie des représentations modulaire $(q \mapsto e^{2\pi i/r})$: trace symétrisante - éléments de Schur

$$\boxed{\mathbb{C} = Y_{d,0}(q) \subset Y_{d,1}(q) \subset \cdots \subset Y_{d,n}(q) \subset Y_{d,n+1}(q) \subset \cdots}$$

$$\boxed{\mathbb{C} = Y_{d,0}(q) \subset Y_{d,1}(q) \subset \cdots \subset Y_{d,n}(q) \subset Y_{d,n+1}(q) \subset \cdots}$$

<u>Théorème</u> (Juyumaya 2004)

Soient $z, x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$ des indéterminées. Il existe une unique application linéaire $tr : \bigcup_{n \geq 0} Y_{d,n}(q) \longrightarrow \mathbb{R}[z, x_1, \ldots, x_{d-1}]$, telle que

- $tr(1) = 1$
- $tr(ab) = tr(ba) \qquad \forall\, a,b \in Y_{d,n}(q)$
- $tr(a g_n) = z \cdot tr(a) \qquad \forall\, a \in Y_{d,n}(q)$
- $tr(a\, t_{n+1}^{m}) = x_m \cdot tr(a) \qquad \forall\, a \in Y_{d,n}(q)$

$$\boxed{\mathbb{C} = Y_{d,0}(q) \subset Y_{d,1}(q) \subset \cdots \subset Y_{d,n}(q) \subset Y_{d,n+1}(q) \subset \cdots}$$

<u>Théorème</u> (Juyumaya 2004)

Soient $z, x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}$ des indéterminées. Il existe une unique application linéaire $tr : \bigcup_{n\geq 0} Y_{d,n}(q) \longrightarrow R[z, x_1, \ldots, x_{d-1}]$, telle que

- $tr(1) = 1$
- $tr(ab) = tr(ba) \qquad \forall\, a,b \in Y_{d,n}(q)$
- $tr(a g_n) = z \cdot tr(a) \qquad \forall\, a \in Y_{d,n}(q)$
- $tr(a t_{n+1}^m) = x_m \cdot tr(a) \qquad \forall\, a \in Y_{d,n}(q)$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n] & \twoheadrightarrow & Y_{d,n}(q) & \xrightarrow{tr} & R[z, x_1, \ldots, x_{d-1}] \\ \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & g_i & & \\ t_j & \longmapsto & t_j & \longmapsto & t_j & & \end{array}}$$

Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$, $\Gamma_d(\alpha) := \tilde{\Lambda}^{n-1}\,\tilde{\lambda}(\alpha)\,\mathrm{tr}(\alpha)$

avec $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha) \in \mathbb{C}(z, x_1, \dots, x_{d-1})$.

Est-ce qu'on trouve $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha)$ en imposant $\Gamma_d(\alpha) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n^{-1})$?

Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$, $\Gamma_d(\alpha) := \tilde{\Lambda}^{n-1} \tilde{\lambda}(\alpha)\, tr(\alpha)$

avec $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha) \in \mathbb{C}(z, x_1, \dots, x_{d-1})$.

Est-ce qu'on trouve $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha)$ en imposant $\Gamma_d(\alpha) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n^{-1})$?

<u>Juyumaya-Lambropoulou 2013</u> :

$$\boxed{tr(\alpha e_n) = tr(\alpha) \cdot tr(e_n) \quad \forall\, \alpha \in Y_{d,n}(q)}$$

Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$, $\Gamma_d(\alpha) := \tilde{\Lambda}^{n-1}\, \tilde{\lambda}(\alpha)\, tr(\alpha)$

avec $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha) \in \mathbb{C}(z, x_1, \ldots, x_{d-1})$.

Est-ce qu'on trouve $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha)$ en imposant $\Gamma_d(\alpha) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n^{-1})$?

Juyumaya - Lambropoulou 2013 :

$$\boxed{tr(\alpha e_n) = tr(\alpha)\cdot tr(e_n) \quad \forall\, \alpha \in Y_{d,n}(q)} \Longrightarrow$$

Système d'équations pour $(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1})$

"E - système"

Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$, $\Gamma_d(\alpha) := \tilde{\Lambda}^{n-1} \tilde{\lambda}(\alpha)\, \mathrm{tr}(\alpha)$

avec $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha) \in \mathbb{C}(z, x_1, \dots, x_{d-1})$.

Est-ce qu'on trouve $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha)$ en imposant $\Gamma_d(\alpha) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n^{-1})$?

<u>Juyumaya-Lambropoulou 2013</u> :

$$\boxed{\mathrm{tr}(\alpha e_n) = \mathrm{tr}(\alpha) \cdot \mathrm{tr}(e_n) \quad \forall\, \alpha \in Y_{d,n}(q)} \Rightarrow$$

Système d'équations pour $(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$

"E - système"

<u>Gérardin</u> : Solutions $\longleftrightarrow$ Sous-ensembles non-vides de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$, $\Gamma_d(\alpha) := \tilde{\Lambda}^{n-1} \tilde{\lambda}(\alpha)\, tr(\alpha)$

avec $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha) \in \mathbb{C}(z, x_1, \dots, x_{d-1})$.

Est-ce qu'on trouve $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha)$ en imposant $\Gamma_d(\alpha) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n^{-1})$?

<u>Juyumaya-Lambropoulou 2013</u> :

$\boxed{tr(\alpha e_n) = tr(\alpha) \cdot tr(e_n) \quad \forall\, \alpha \in Y_{d,n}(q)}$ $\Rightarrow$ Système d'équations pour $(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$

"E - système"

<u>Gérardin</u> : Solutions $\longleftrightarrow$ Sous-ensembles non-vides de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$D \subseteq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $D \neq \emptyset$ $\rightsquigarrow$ $\Gamma_{d,D}$ invariant de noeuds à poids (q, z)

Pour $\alpha \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$, $\Gamma_d(\alpha) := \tilde{\Lambda}^{n-1}\,\tilde{\lambda}(\alpha)\,\mathrm{tr}(\alpha)$

avec $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha) \in \mathbb{C}(z, x_1, \dots, x_{d-1})$.

Est-ce qu'on trouve $\tilde{\Lambda}, \tilde{\lambda}(\alpha)$ en imposant $\Gamma_d(\alpha) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n) = \Gamma_d(\alpha\sigma_n^{-1})$?

Juyumaya-Lambropoulou 2013 :

$\boxed{\mathrm{tr}(\alpha e_n) = \mathrm{tr}(\alpha)\cdot\mathrm{tr}(e_n) \quad \forall\, \alpha \in Y_{d,n}(q)}$ $\Rightarrow$ Système d'équations pour $(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$

"E - système"

Gérardin : Solutions $\longleftrightarrow$ Sous-ensembles non-vides de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$D \subseteq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $D \neq \emptyset$ $\rightsquigarrow$ $\Gamma_{d,D}$ invariant de noeuds à poids (q, z)

$\rightsquigarrow$ $\Theta_{d,D}$ invariant de noeuds classiques (q, z)

<u>Théorème</u> (C.-Juyumaya-Karvounis-Lambropoulou 2015)

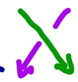
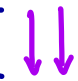
- Si $\hat{\alpha}$ est une union de k noeuds disjoints, alors

$$\Theta_{d,D}(\alpha) = |D|^{k-1}\, P(\alpha) \quad \text{pour } \mathfrak{z} = z|D|.$$

Théorème (C.-Juyumaya-Karvounis-Lambropoulou 2015)

- Si $\hat{\alpha}$ est une union de k noeuds disjoints, alors

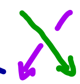
$$\Theta_{d,D}(\alpha) = |D|^{k-1} P(\alpha) \quad \text{pour } \zeta = z|D|.$$

- $\gamma\,\Theta_{d,D}\Big($  $\Big) - \gamma^{-1}\,\Theta_{d,D}\Big($  $\Big) = (q-q^{-1})\,\Theta_{d,D}\Big($  $\Big)$

Théorème (C.-Juyumaya-Karvounis-Lambropoulou 2015)

- Si $\hat{\alpha}$ est une union de k noeuds disjoints, alors

$$\Theta_{d,D}(\alpha) = |D|^{k-1}\, P(\alpha) \quad \text{pour } \zeta = z|D|.$$

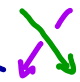
- $\gamma\, \Theta_{d,D}($  $) - \gamma^{-1}\, \Theta_{d,D}($  $) = (q-q^{-1})\, \Theta_{d,D}(\downarrow\downarrow)$

- $\Theta_{d,D}$ se généralise à un invariant "d'écheveau" Θ à 3 variables q, z, ε. [$\Theta_{d,D}$ ne dépend que de $|D| \rightsquigarrow \varepsilon$]

<u>Théorème</u> (C.-Juyumaya-Karvounis-Lambropoulou 2015)

- Si $\hat{\alpha}$ est une union de k noeuds disjoints, alors

$$\Theta_{d,D}(\alpha) = |D|^{k-1} P(\alpha) \quad \text{pour } \zeta = z|D|.$$

- $\gamma\, \Theta_{d,D}\Big($  $\Big) - \gamma^{-1}\, \Theta_{d,D}\Big($  $\Big) = (q-q^{-1})\, \Theta_{d,D}(\downarrow\downarrow)$

- $\Theta_{d,D}$ se généralise à un invariant "d'écheveau" Θ à 3 variables q, z, E. [$\Theta_{d,D}$ ne dépend que de $|D| \rightsquigarrow E$]

- Θ est un invariant plus fin que P sur les entrelacs.

__Théorème__ (C.-Juyumaya-Karvounis-Lambropoulou 2015)

- Si $\hat{\alpha}$ est une union de k noeuds disjoints, alors
$$\Theta_{d,D}(\alpha) = |D|^{k-1}\, P(\alpha) \quad \text{pour } \zeta = z|D|.$$

- $$\gamma\, \Theta_{d,D}(\times) - \gamma^{-1}\, \Theta_{d,D}(\times) = (q-q^{-1})\, \Theta_{d,D}(\downarrow\downarrow)$$

- $\Theta_{d,D}$ se généralise à un invariant "d'écheveau" Θ à 3 variables q, z, ε. [$\Theta_{d,D}$ ne dépend que de $|D| \rightsquigarrow \varepsilon$]

- Θ est un invariant plus fin que P sur les entrelacs.

- Lickorish, Poulain d'Andecy-Wagner 2016 : Formule pour $\Theta(\hat{\alpha})$ qui utilise les enlacements et les polynômes de HOMFLYPT de tous les sous-entrelacs de $\hat{\alpha}$

Quotients de type Temperley-Lieb

Algèbre	$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q)\otimes TL_{d,n}(q))$ (C.-Pouchin)	Invariant (GJKL)
$YTL_{d,n}(q)$	$\{\lambda \in \mathcal{P}(d,n) \mid \lambda$ a au total ≤ 2 colonnes$\}$	Jones
$FTL_{d,n}(q)$	$\{\lambda \in \mathcal{P}(d,n) \mid \lambda_i$ a ≤ 2 colonnes $\forall\, i\}$	$\theta >$ Jones
$CTL_{d,n}(q)$	$\{\lambda \in \mathcal{P}(d,n) \mid \lambda_1$ a ≤ 2 colonnes$\}$	θ ou $\ominus$

Quotients de type Temperley-Lieb

Algèbre	$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}(q) * TL_{d,n}(q))$ (C.-Pouchin)	Invariant (GJKL)
$YTL_{d,n}(q)$	$\{\lambda \in \mathcal{P}(d,n) \mid \lambda$ a au total $\leqslant 2$ colonnes$\}$	Jones
$FTL_{d,n}(q)$	$\{\lambda \in \mathcal{P}(d,n) \mid \lambda_i$ a $\leqslant 2$ colonnes $\forall i\}$	$\theta >$ Jones
$CTL_{d,n}(q)$	$\{\lambda \in \mathcal{P}(d,n) \mid \lambda_1$ a $\leqslant 2$ colonnes$\}$	θ ou $\ominus$

Projet en cours (avec Goundaroulis, Kontogeorgis, Lambropoulou) :

Catégorification de θ

Généralisations cyclotomiques et affines

$$\mathbb{C}[G(d,1,n)]$$

Algèbre de Yokonuma-Hecke

Algèbre de Ariki-Koike

Généralisations cyclotomiques et affines

$\mathbb{C}[G(d,1,n)]$

Algèbre de Yokonuma-Hecke

* produit en couronne
* groupe de tresses de type A

Algèbre de Ariki-Koike

* relation quadratique
* groupe de tresses de type B

Généralisations cyclotomiques et affines

$\mathbb{C}[G(d,1,n)]$

Algèbre de Yokonuma-Hecke

* produit en couronne
* groupe de tresses de type A

Algèbre de Ariki-Koike

* relation quadratique
* groupe de tresses de type B

C.-Poulain d'Andecy 2015 : Algèbre de Y-H cyclotomique

Algèbre de Y-H affine

Généralisations cyclotomiques et affines

$\mathbb{C}[G(d,1,n)]$

Algèbre de Yokonuma-Hecke

* produit en couronne
* groupe de tresses de type A

Algèbre de Ariki-Koike

* relation quadratique
* groupe de tresses de type B

C.- Poulain d'Andecy 2015 : Algèbre de Y-H cyclotomique

Algèbre de Y-H affine

- Théorie des représentations
- Traces de Markov
- Invariants de noeuds dans le tore solide

L' algèbre de Yokonuma-Hecke affine (de type A)

$$
\begin{tikzcd}
\text{Algèbre de Iwahori-Hecke} & & \text{Algèbre de Y-H} \arrow[ll, two heads, "t_j \mapsto 1"'] \\
\text{Algèbre de Hecke affine} \arrow[u, two heads, "X_1 \mapsto 1"'] & & \text{Algèbre de Y-H affine} \arrow[ll, two heads, "t_j \mapsto 1"'] \arrow[u, two heads, "X_1 \mapsto 1"']
\end{tikzcd}
$$

$\left(\begin{array}{l} + \ X_1^{\pm 1} \text{ qui commute avec tout} \\ \text{sauf } \ g_1 X_1 g_1 X_1 = X_1 g_1 X_1 g_1 \end{array} \right)$

L' algèbre de Yokonuma-Hecke affine (de type A)

$$\begin{tikzcd}
\text{Algèbre de Iwahori-Hecke} & & \text{Algèbre de Y-H} \arrow[ll, two heads, "t_j \mapsto 1"'] \\
\text{Algèbre de Hecke affine} \arrow[u, two heads, "X_1 \mapsto 1"'] & & \text{Algèbre de Y-H affine} \arrow[ll, two heads, "t_j \mapsto 1"] \arrow[u, two heads, "X_1 \mapsto 1"']
\end{tikzcd}$$

$\left(\begin{array}{l} + \ X_1^{\pm 1} \text{ qui commute avec tout} \\ \text{sauf } \ g_1 X_1 g_1 X_1 = X_1 g_1 X_1 g_1 \end{array} \right)$

$$\begin{tikzcd}
\text{Algèbre de Iwahori-Hecke} \arrow[rr, squiggly, "\text{Borel} \to", "\text{Max}^{\text{l}} \text{ unipotent}"'] & & \text{Algèbre de Y-H} \\
\text{Algèbre de Hecke affine} \arrow[u, hook] \arrow[rr, squiggly, "\text{Iwahori} \to", "\text{pro-p-Iwahori}"'] & & \text{Algèbre de pro-p-Iwahori-Hecke (Vignéras)} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

L'algèbre de Yokonuma-Hecke affine (de type A)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{Algèbre de Iwahori-Hecke} & \text{Algèbre de Y-H} \arrow[l, two heads, "t_j \mapsto 1"'] \\
\text{Algèbre de Hecke affine} \arrow[u, two heads, "X_1 \mapsto 1"] & \text{Algèbre de Y-H affine} \arrow[l, two heads, "t_j \mapsto 1"] \arrow[u, two heads, "X_1 \mapsto 1"'] \arrow[dd, "\wr\ (\text{C.-Sécherre } 2016)"] \\
\text{Algèbre de Iwahori-Hecke} \arrow[r, squiggly, "\text{Borel} \to", "\text{Max}^{l} \text{ unipotent}"'] & \text{Algèbre de Y-H} \\
\text{Algèbre de Hecke affine} \arrow[u] \arrow[r, squiggly, "\text{Iwahori} \to", "\text{pro-}p\text{-Iwahori}"'] & \text{Algèbre de pro-}p\text{-Iwahori-Hecke (Vignéras)} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

(+ $X_1^{\pm 1}$ qui commute avec tout
sauf $g_1 X_1 g_1 X_1 = X_1 g_1 X_1 g_1$)