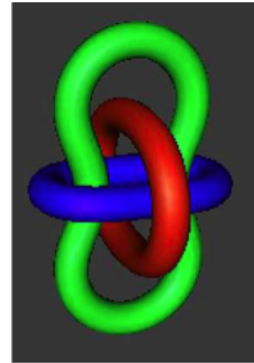
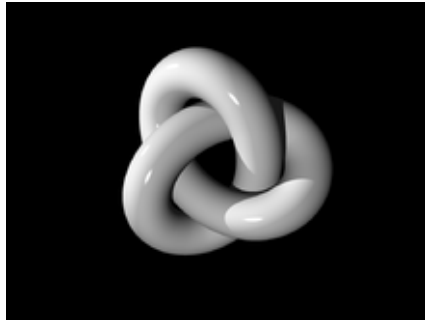


# NOEUDS, TRESSES ET ALGEBRES DE HECKE

MARIA CHLOUVERAKI

Université de Versailles - St Quentin

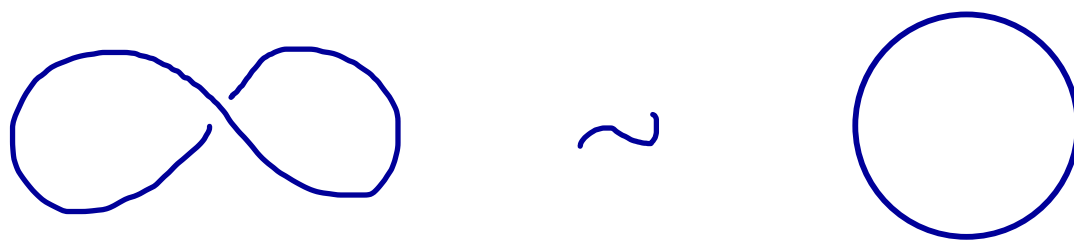
Un **noeud** (resp. un **entrelac**) est un plongement du cercle  $S^1$  (resp.  $n$  copies de  $S^1$ ) dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .



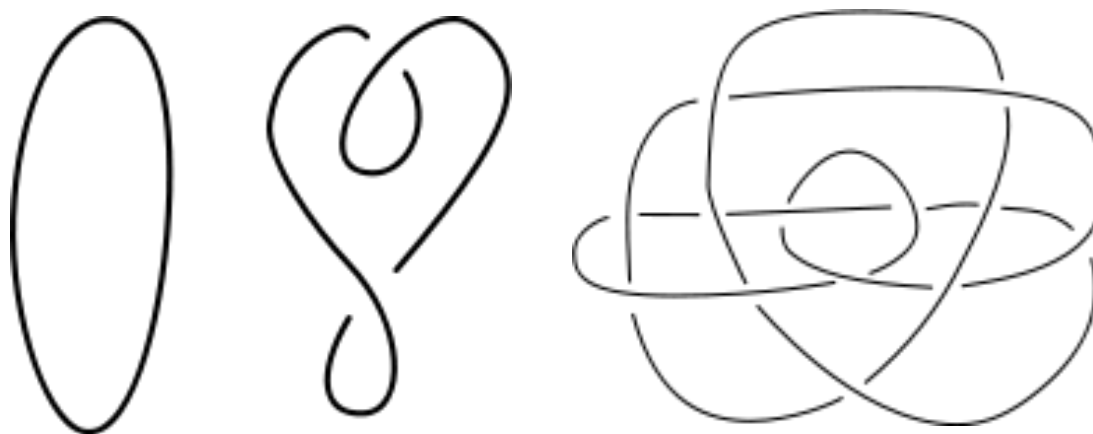
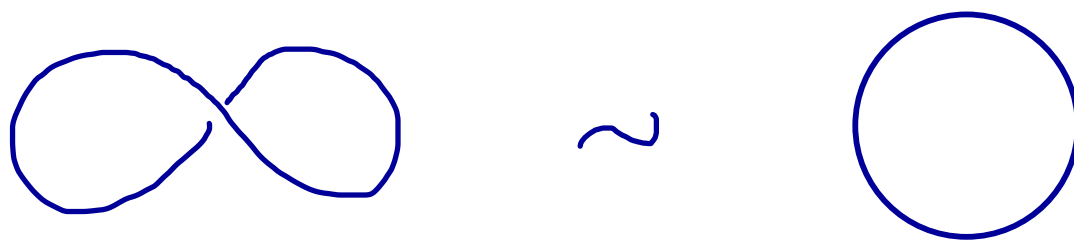
Tout noeud ou entrelac peut être représenté par un diagramme :



Deux noeuds (ou entrelacs) sont **équivalents** s'il existe une isotopie entre eux.

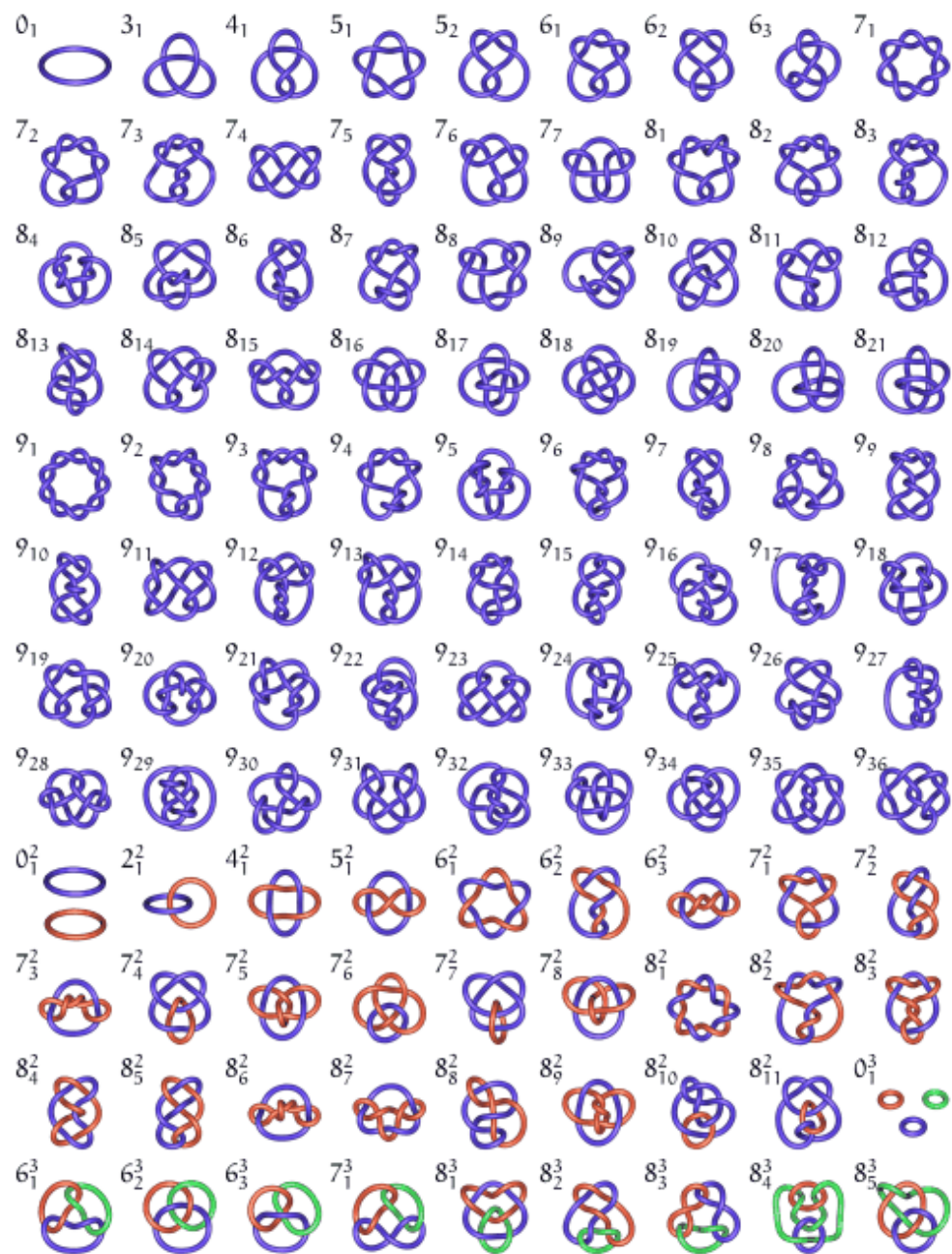


Deux noeuds (ou entrelacs) sont **équivalents** s'il existe une isotopie entre eux.



Q. Quand est-ce que 2 diagrammes représentent le même noeud?

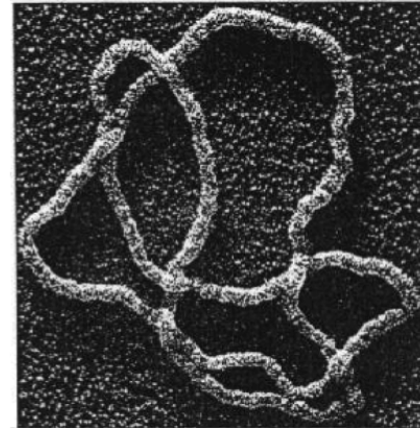
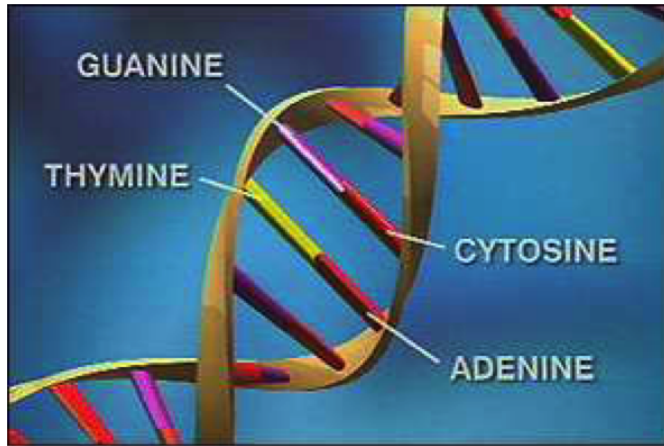




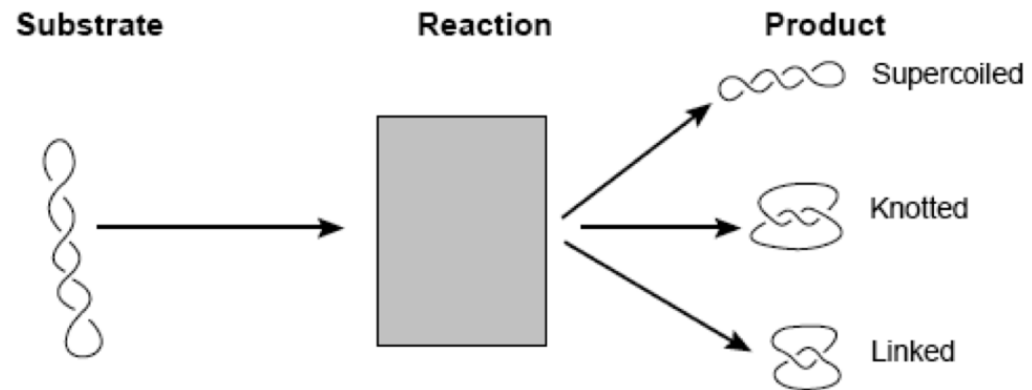
- Vandermonde (1735 - 1796) :  
Importance des noeuds
- Gauss (1777 - 1855) :  
Liste de 13 noeuds  
Enlacement
- Lord Kelvin (1824 - 1907) :  
"The atoms are knots in the aether"
- Tait (1839 - 1901) :  
Tableau des noeuds avec au plus 10 croisements - 20 ans de travail !
- Aujourd'hui , plus que 6.000.000.000 noeuds et entrelacs sont connus.

# Applications de la théorie des noeuds

## 1) ADN

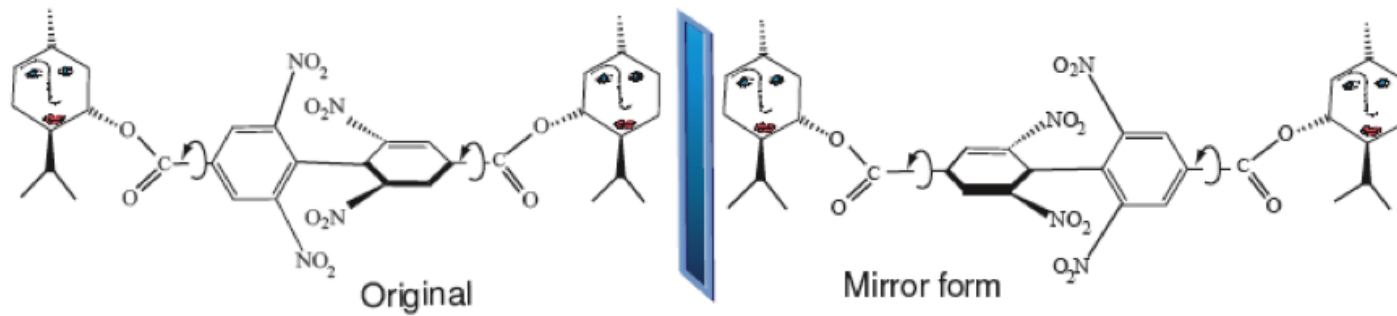
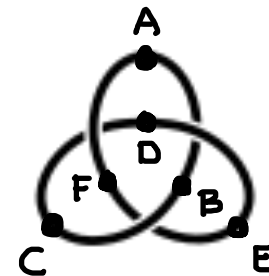
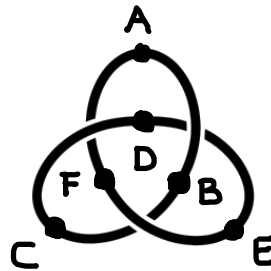
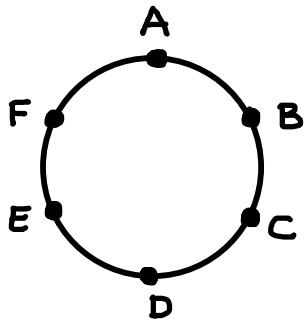


## Action des enzymes



# Applications de la théorie des noeuds

## 2) Chimie



# Applications de la théorie des noeuds

## 3) Polymères

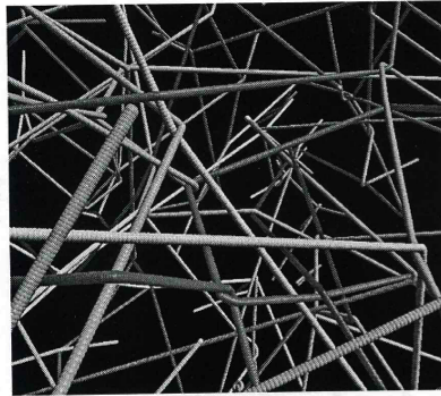
### Topological Analysis of Linear Polymer Melts

Christos Tzoumanekas\* and Doros N. Theodorou†

*Department of Materials Science and Engineering, School of Chemical Engineering,  
National Technical University of Athens, Zografou Campus, 15780 Athens, Greece and  
Dutch Polymer Institute (DPI), The Netherlands*

(Dated: 21st September 2005)

We introduce an algorithm for the reduction of computer generated atomistic polymer samples to networks of primitive paths. By examining network ensembles of Polyethylene and cis-1,4 Polybutadiene melts, we quantify the underlying topologies through the radial distribution function of entanglements and the distribution of the number of monomers between entanglements. A suitable scaling of acquired data leads to a unifying microscopic topological description of both melts.



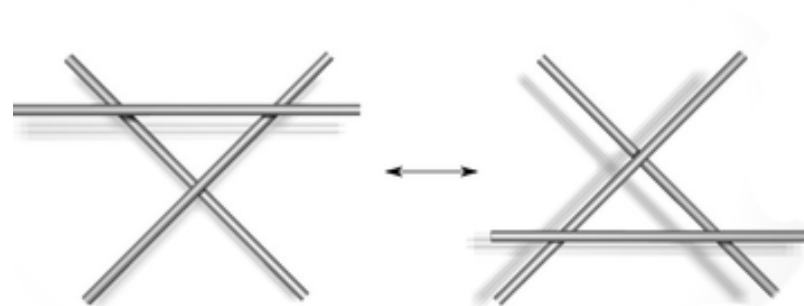
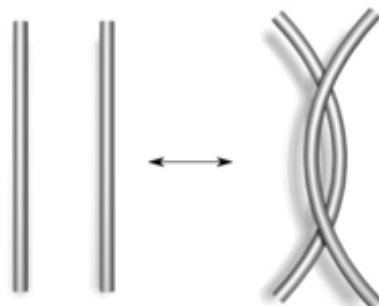
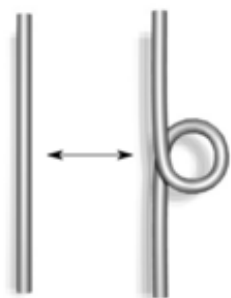
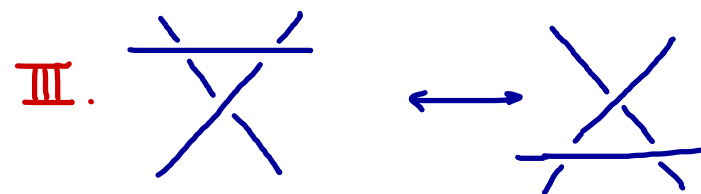
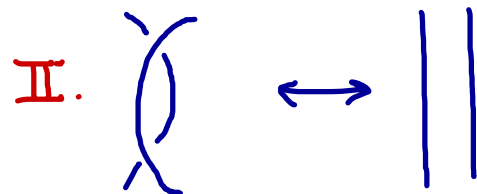
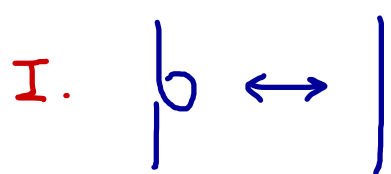
## Applications de la théorie des noeuds

4) Mécanique statistique (e.g., Modèle de Potts)

5) Circuits électriques

6) Ordinateurs quantiques

Théorème (Reidemeister 1935) : Deux noeuds  $K_1, K_2$  sont équivalents si et seulement si le diagramme de  $K_2$  peut être obtenu du diagramme de  $K_1$  via un nombre fini de mouvements suivants :



Si  $K_1, K_2$  sont équivalents, nous écrivons  $K_1 \sim K_2$ .

$\mathcal{L}$  = ensemble des noeuds ou entrelacs

$S$  = un ensemble

Un invariant de noeuds est une fonction  $I: \mathcal{L} \rightarrow S$  telle que

$$K_1 \sim K_2 \implies I(K_1) = I(K_2)$$

pour  $K_1, K_2 \in \mathcal{L}$



$\mathcal{L}$  = ensemble des noeuds ou entrelacs

$S$  = un ensemble

Un invariant de noeuds est une fonction  $I: \mathcal{L} \rightarrow S$  telle que

$$K_1 \sim K_2 \implies I(K_1) = I(K_2)$$

pour  $K_1, K_2 \in \mathcal{L}$ , i.e.,

$$I(K_1) \neq I(K_2) \implies K_1 \not\sim K_2$$

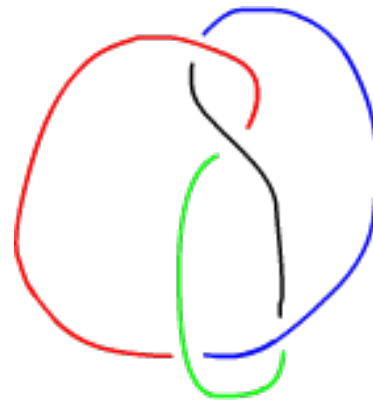
## Tricolorabilité ( $S = \{ V, F \}$ )

Un noeud est **tricolorable** si tout segment de son diagramme peut être coloré par une couleur parmi 3 , sous les conditions suivantes :

- au moins 2 couleurs doivent être utilisées,
- à chaque croisement , les 3 segments qui se rencontrent ont soit le même couleur soit les 3 couleurs différentes.

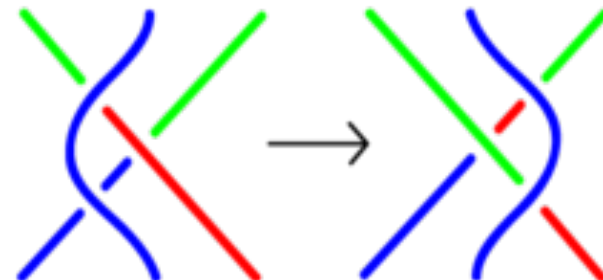
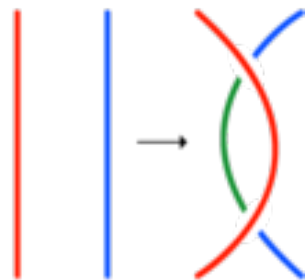
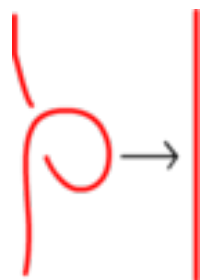


tricolorable (V)

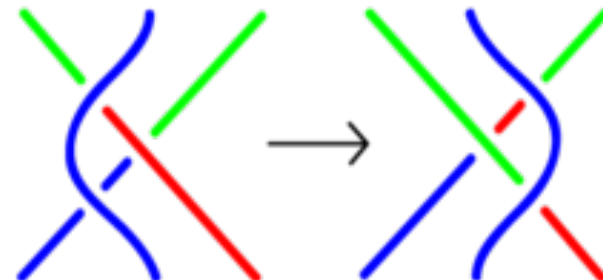
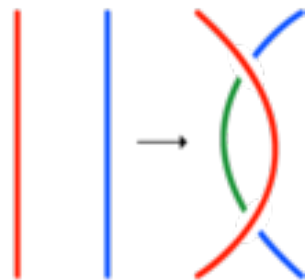
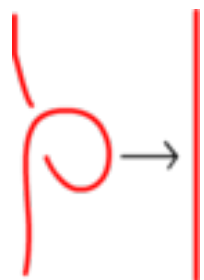


non-tricolorable (F)

La tricolorabilité est un invariant de noeuds , parce qu'elle est respectée par les mouvements de Reidemeister.



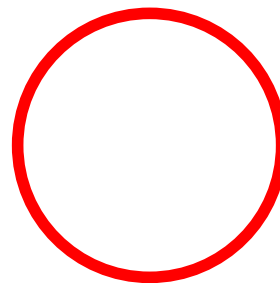
La tricolorabilité est un invariant de noeuds , parce qu'elle est respectée par les mouvements de Reidemeister.



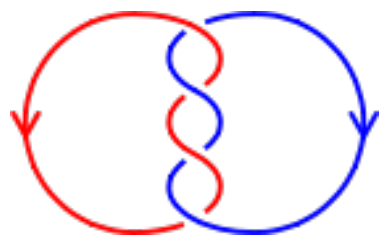
Exemple :



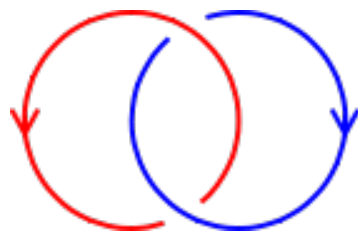
$\approx$



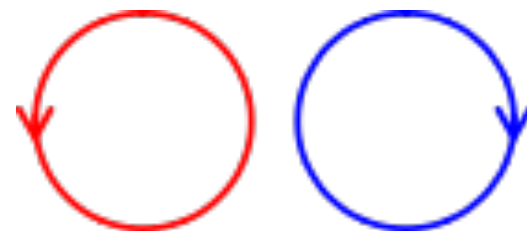
# Enlacement ( $S = \mathbb{Z}$ )



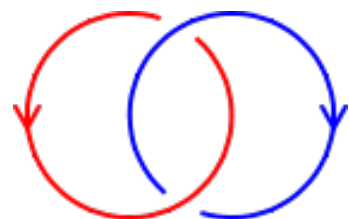
$$e = -2$$



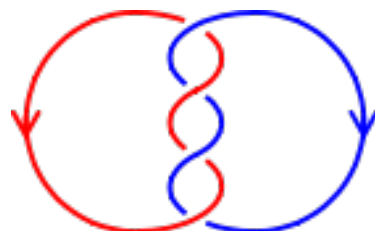
$$e = -1$$



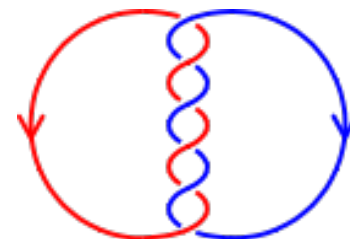
$$e = 0$$



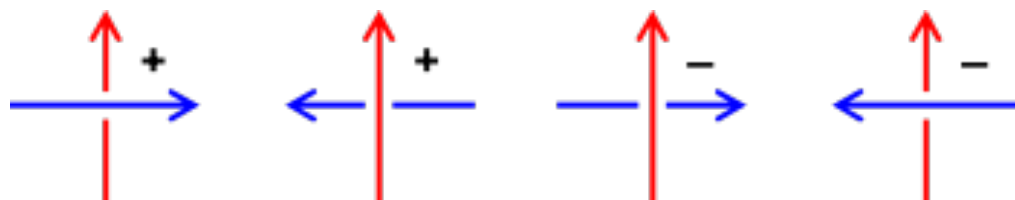
$$e = 1$$



$$e = 2$$



$$e = 3$$



$$e = \frac{n_1 + n_2 - n_3 - n_4}{2}$$

## Invariants polynômiaux ( $S = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}]$ )

- Polynôme de Alexander (1927)
- Polynôme de Alexander-Conway (1969)



- Polynôme de Jones (1984)



- Polynôme de HOMFLY-PT

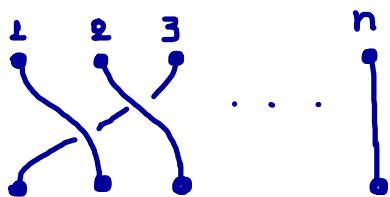
(Hoste-Oceanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter , 1985 /  
Przytycki - Traczyk , 1987)

## Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & i \neq j, |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

# Groupe de tresses

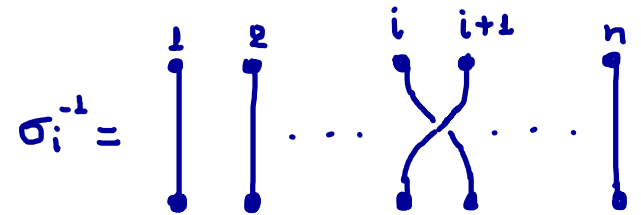
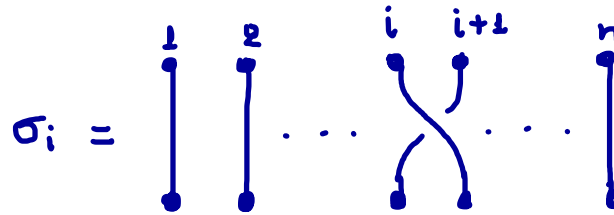
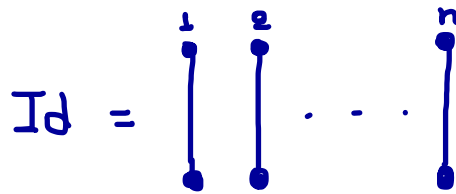
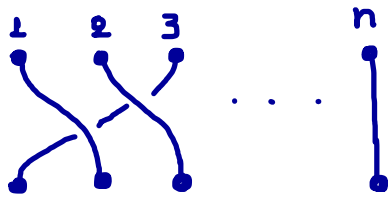
$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad i \neq j, |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$





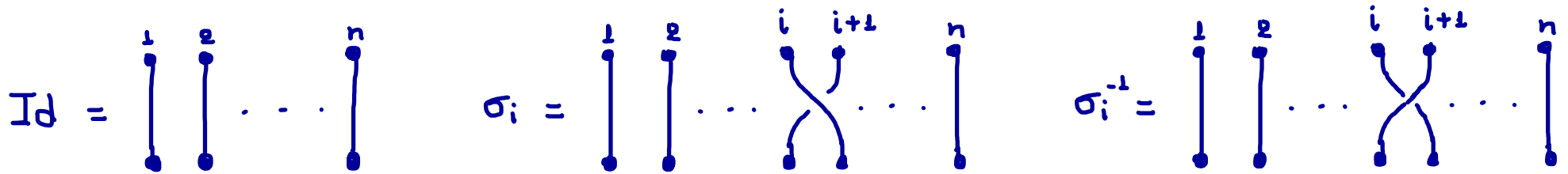
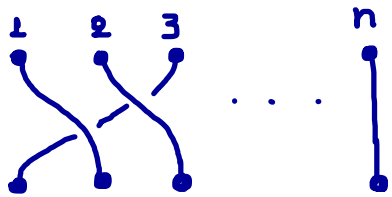
# Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad i \neq j, |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

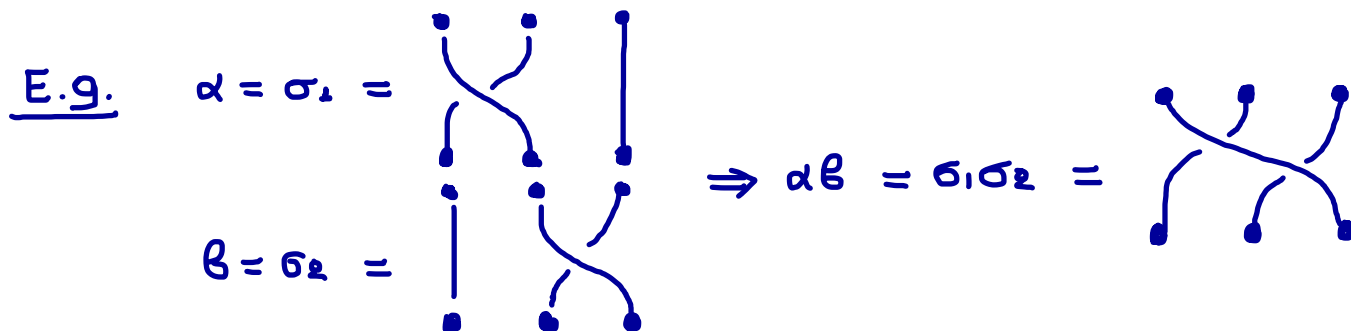


# Groupe de tresses

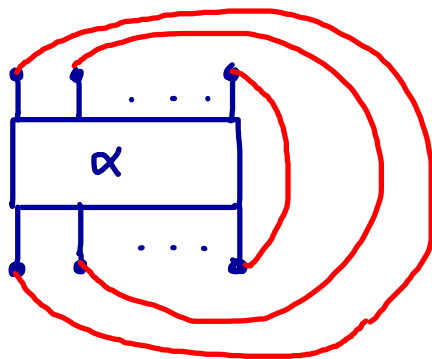
$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad i \neq |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$



Multiplication : concaténation de diagrammes

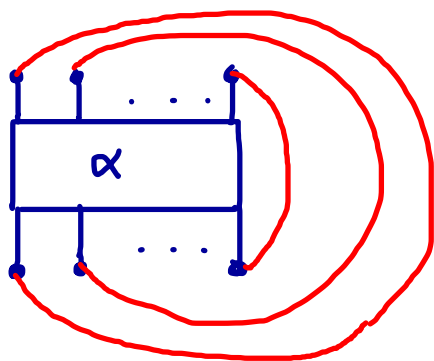


Tout élément de  $B_n$  produit un noeud ou un entrelac :



$= : \hat{\alpha} = \text{cl\^oture de } \alpha$

Tout élément de  $B_n$  produit un noeud ou un entrelac :



$= : \hat{\alpha} = \text{cl\^oture de } \alpha$

E.g.  $\alpha = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad \hat{\alpha} = \bigcirc$

$\alpha = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \hat{\alpha} = \bigcirc \bigcirc$

$\alpha = \sigma_1 = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \hat{\alpha} = \bigcirc \sim \bigcirc$

$\alpha = \sigma_1^2 = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \hat{\alpha} = \bigcirc \sim \bigcirc$

$\alpha = \sigma_1^3 \quad \hat{\alpha} = \text{tr\^efle \`a gauche}$

## Théorème d'Alexander (1923)

Tout nœud ou entrelac peut être obtenu comme la clôture d'une tresse  $\alpha \in \bigcup_{n \geq 1} B_n$

## Théorème d'Alexander (1923)

Tout nœud ou entrelac peut être obtenu comme la clôture d'une tresse  $\alpha \in \bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

Définissons une relation d'équivalence sur  $\bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

comme la clôture transitive des relations :

- (i)  $\alpha\beta \sim \beta\alpha$  ,  $\alpha, \beta \in B_n$  (conjugaison)
- (ii)  $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$  ,  $\alpha \in B_n$  (mouvement de Markov)

## Théorème d'Alexander (1923)

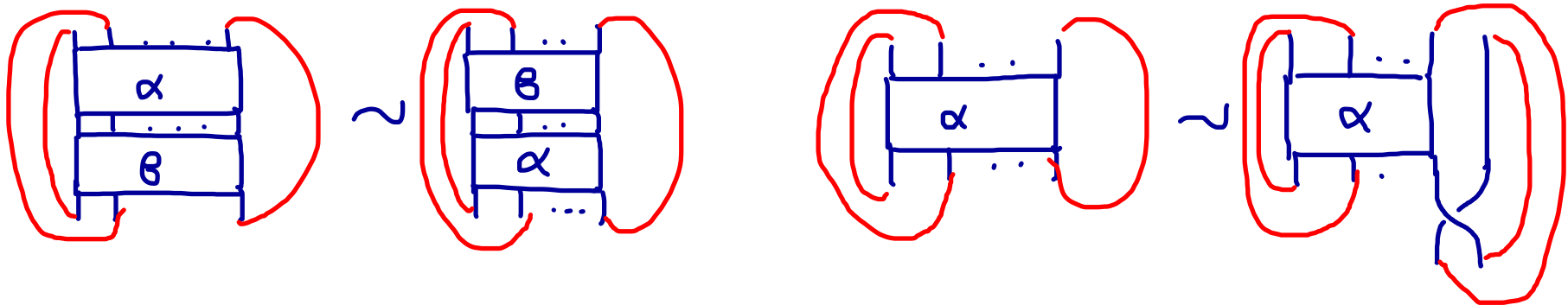
Tout nœud ou entrelac peut être obtenu comme la clôture d'une tresse  $\alpha \in \bigcup_{n \geq 1} B_n$

Définissons une relation d'équivalence sur  $\bigcup_{n \geq 1} B_n$  comme la clôture transitive des relations :

- (i)  $\alpha\beta \sim \beta\alpha$  ,  $\alpha, \beta \in B_n$  (conjugaison)
- (ii)  $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$  ,  $\alpha \in B_n$  (mouvement de Markov)

## Théorème de Markov (1935)

Nous avons  $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$  si et seulement si  $\alpha \sim \beta$ .



## Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \left| \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = (q-1) G_i + q \end{array} \right. \right\rangle$$



## Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \left| \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = (q-1) G_i + q \end{array} \right. \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[B_n]$

## Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \left| \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = (q-1) G_i + q \end{array} \right. \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$  :  $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$

## Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \left| \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = (q-1) G_i + q \end{array} \right. \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$  :  $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathcal{H}_n(q)$  est un  $\mathbb{C}$ -module libre de rang  $n! = |S_n|$

## Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \left| \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = (q-1) G_i + q \end{array} \right. \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$  :  $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathcal{H}_n(q)$  est un  $\mathbb{C}$ -module libre de rang  $n! = |S_n|$
- $G_i^{-1} = q^{-1} G_i + (q^{-1} - 1) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

## Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle G_1, \dots, G_{n-1} \left| \begin{array}{l} G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \\ G_i G_j = G_j G_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ G_i^2 = (q-1) G_i + q \end{array} \right. \right\rangle$$

- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$  :  $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $\mathcal{H}_n(q)$  est un  $\mathbb{C}$ -module libre de rang  $n! = |S_n|$
- $G_i^{-1} = q^{-1} G_i + (q^{-1} - 1) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

$$\mathbb{C} = \mathcal{H}_1(q) \subset \mathcal{H}_2(q) \subset \dots \subset \mathcal{H}_n(q) \subset \mathcal{H}_{n+1}(q) \subset \dots$$

### Théorème ( Jones - Ocneanu 1987 )

Soit  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Il existe une unique application linéaire  $\tau = (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau_n: \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow \mathbb{C}$ , telle que

- $\tau_n(1) = 1$
- $\tau_n(ab) = \tau_n(ba) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau_n(\alpha G_{n-1}) = \zeta \tau_{n-1}(a) \quad \forall a \in \mathcal{H}_{n-1}(q)$

### Théorème ( Jones - Ocneanu 1987 )

Soit  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Il existe une unique application linéaire  $\tau = (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\tau_n: \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow \mathbb{C}$ , telle que

- $\tau_n(1) = 1$
- $\tau_n(ab) = \tau_n(ba) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau_n(\alpha G_{n-1}) = \zeta \tau_{n-1}(a) \quad \forall a \in \mathcal{H}_{n-1}(q)$

$$\begin{array}{ccccccc} B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \longrightarrow & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\ \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & G_i & & \end{array}$$

Polynôme de HOMFLYPT (normalisation de la trace  $\tau$ )

$$\underline{\mathfrak{z} \neq 0}, \underline{\mathfrak{z} \neq q^{-1}}$$



## Polynôme de HOMFLYPT (normalisation de la trace $\tau$ )

$$\underline{q} \neq 0, \quad \underline{q} \neq q^{-1}$$

$$\alpha \in B_n \quad \alpha = \prod \sigma_i^{r_i} \quad \exp(\alpha) := \sum r_i$$

$$\underline{\text{E.g.}} \quad \alpha = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-3} \in B_3 \quad \exp(\alpha) = -1$$

## Polynôme de HOMFLYPT (normalisation de la trace $\tau$ )

$$\underline{\mathfrak{z} \neq 0}, \quad \underline{\mathfrak{z} \neq q^{-1}}$$

$$\alpha \in B_n \quad \alpha = \prod \sigma_i^{r_i} \quad \exp(\alpha) := \sum r_i$$

$$\underline{\text{E.g.}} \quad \alpha = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-3} \in B_3 \quad \exp(\alpha) = -1$$

$$\text{Nous avons } \exp(\alpha\beta) = \exp(\beta\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in B_n$$

## Polynôme de HOMFLYPT (normalisation de la trace $\tau$ )

$$\underline{q} \neq 0, \quad \underline{q} \neq q^{-1}$$

$$\alpha \in B_n \quad \alpha = \prod \sigma_i^{r_i} \quad \exp(\alpha) := \sum r_i$$

$$\underline{\text{E.g.}} \quad \alpha = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-3} \in B_3 \quad \exp(\alpha) = -1$$

$$\text{Nous avons } \exp(\alpha\beta) = \exp(\beta\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in B_n$$

$$P(\alpha) := D^{n-1} \cdot \lambda^{\exp(\alpha)} \cdot \tau(\alpha)$$

## Polynôme de HOMFLYPT (normalisation de la trace $\tau$ )

$$\zeta \neq 0, \zeta \neq q^{-1}$$

$$\alpha \in B_n \quad \alpha = \prod \sigma_i^{r_i} \quad \exp(\alpha) := \sum r_i$$

E.g.  $\alpha = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-3} \in B_3 \quad \exp(\alpha) = -1$

Nous avons  $\exp(\alpha\beta) = \exp(\beta\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in B_n$

$$P(\alpha) := D^{n-1} \cdot \lambda^{\exp(\alpha)} \cdot \tau(\alpha)$$

$$P(\alpha) = P(\alpha\sigma_n) \Rightarrow D^{n-1} \cdot \lambda^{\exp(\alpha)} \tau(\alpha) = D^n \lambda^{\exp(\alpha)+1} \underbrace{\tau(\alpha\sigma_n)}_{\zeta \cdot \tau(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = 1 / \lambda \zeta}$$

$$P(\alpha \sigma_n) = P(\alpha \sigma_{n^{-1}}) \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3 + (1-q)}{3q}}$$

en utilisant que  $g_{n^{-1}} = q^{-1} g_n + (q^{-1} - 1)$ .

$$P(\alpha \sigma_n) = P(\alpha \sigma_n^{-1}) \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3 + (1-q)}{3q}}$$

en utilisant que  $g_n^{-1} = q^{-1} g_n + (q^{-1} - 1)$ .

$$\hat{P}(\hat{\alpha}) := P(\alpha) = D^{n-1} \cdot \lambda^{\text{exp}(\alpha)} \cdot \tau(\alpha) \quad \forall \alpha \in B_n$$

$\hat{P} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$  est un invariant de nœuds

HOMFLYPT (ou polynôme de Jones à 2 variables)

## Groupe de tresses à poids

Soit  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\begin{array}{l} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\ \parallel \\ (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n \end{array} = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \right| \begin{array}{l} \sigma_i \text{ comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j=1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i, j=1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

où  $s_i = (i, i+1) \in S_n$

## Groupe de tresses à poids

Soit  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\begin{array}{l} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\ \parallel \\ (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n \end{array} = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \right| \begin{array}{l} \sigma_i \text{ comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j=1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i, j=1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

où  $s_i = (i, i+1) \in S_n$

E.g.  $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}, n=2$

$$t_1^a t_2^b = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \searrow \swarrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$



## Groupe de tresses à poids

Soit  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\begin{array}{l} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\ \parallel \\ (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n \end{array} = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \right| \begin{array}{l} \sigma_i \text{ comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j=1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i, j=1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

où  $s_i = (i, i+1) \in S_n$

E.g.  $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}, n=2$

$$t_1^a t_2^b = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \searrow \quad \swarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

Multiplication : concaténation de diagrammes

E.g.  $(t_1^a t_2^b \sigma_1) \cdot (t_1^{a'} t_2^{b'}) = t_1^{a+b'} t_2^{b+a'} \sigma_1$

Tout élément de  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})[B_n]$  produit un noeud ou un entrelac à poids

E.g.  $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ ,  $n=2$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \\ \bullet & \bullet \end{array} \\ \text{diagram of } \sigma_1 \text{ with red arcs labeled } a \text{ and } b \end{array} \xrightarrow{\wedge} \bigcirc_{a+b}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \\ \bullet & \bullet \end{array} \\ \text{diagram of } \sigma_1^2 \text{ with red arcs labeled } a \text{ and } b \end{array} \xrightarrow{\wedge} \bigcirc_a \bigcirc_b$$

Tout élément de  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$  produit un noeud ou un entrelac à poids

E.g.  $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ ,  $n=2$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \text{diagram} \xrightarrow{\wedge} \text{circle}^{a+b}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \text{diagram} \xrightarrow{\wedge} \text{link}^{a,b}$$

$$d=3: \quad \widehat{t_1 t_2 \sigma_1} \sim \widehat{t_1^2 \sigma_1}, \quad \widehat{t_1 t_2 \sigma_1^2} \not\sim \widehat{t_1^2 \sigma_1^2}$$

Tout élément de  $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$  produit un noeud ou un entrelac à poids

E.g.  $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ ,  $n=2$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \text{diagram} \xrightarrow{\wedge} \text{circle}^{a+b}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \text{diagram} \xrightarrow{\wedge} \text{link}^{a,b}$$

$$d=3: \quad \widehat{t_1 t_2 \sigma_1} \sim \widehat{t_1^2 \sigma_1}, \quad \widehat{t_1 t_2 \sigma_1^2} \not\sim \widehat{t_1^2 \sigma_1^2}$$

Théorème d'Alexander : évident

Théorème de Markov : Ko - Smolinsky 1992

# Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s(i,j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

## Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$

# Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$  :  $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$ , où  $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$

## Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$  :  $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$ , où  $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$  :  $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$



## Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$  :  $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$ , où  $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$  :  $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $Y_{d,n}(q)$  ( $t_j \mapsto 1$ )

## Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s(i,j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$  :  $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$ , où  $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$  :  $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $Y_{d,n}(q)$  ( $t_j \mapsto 1$ )
- $Y_{d,n}(q)$  est un  $\mathbb{C}$ -module libre de rang  $d^n \cdot n! = |G(d,1,n)|$

## Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{c} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s(i,j)} \\ g_i^2 = (q-1)e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où  $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}$  est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$  est un quotient de  $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $q = 1$  :  $Y_{d,n}(1) \cong \mathbb{C}[G(d,1,n)]$ , où  $G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr S_n$
- $d = 1$  :  $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- $\mathcal{H}_n(q)$  est un quotient de  $Y_{d,n}(q)$  ( $t_j \mapsto 1$ )
- $Y_{d,n}(q)$  est un  $\mathbb{C}$ -module libre de rang  $d^n \cdot n! = |G(d,1,n)|$
- $g_i^{-1} = q^{-1} g_i + (q^{-1} - 1)e_i \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

$$\mathbb{C} = Y_{d,0}(q) \subset Y_{d,1}(q) \subset \dots \subset Y_{d,n}(q) \subset Y_{d,n+1}(q) \subset \dots$$

$$\mathbb{C} = Y_{d,0}(q) \subset Y_{d,1}(q) \subset \dots \subset Y_{d,n}(q) \subset Y_{d,n+1}(q) \subset \dots$$

### Théorème (Tuyumaya 2004)

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $(x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$  avec  $x_0 = 1$ . Il existe une unique application linéaire  $tr = (tr_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $tr_n: Y_{d,n}(q) \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que

- $tr_n(1) = 1$
- $tr_n(ab) = tr_n(ba) \quad \forall a, b \in Y_{d,n}(q)$
- $tr_n(\alpha q_{n-1}) = z \cdot tr_{n-1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in Y_{d,n-1}(q)$
- $tr_n(\alpha t_n^m) = x_m \cdot tr_{n-1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in Y_{d,n-1}(q)$

$$\mathbb{C} = Y_{d,0}(q) \subset Y_{d,1}(q) \subset \dots \subset Y_{d,n}(q) \subset Y_{d,n+1}(q) \subset \dots$$

Théorème (Tuyumaya 2004)

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $(x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$  avec  $x_0 = 1$ . Il existe une unique application linéaire  $tr = (tr_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $tr_n: Y_{d,n}(q) \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que

- $tr_n(1) = 1$
- $tr_n(ab) = tr_n(ba) \quad \forall a, b \in Y_{d,n}(q)$
- $tr_n(\alpha g_{n-1}) = z \cdot tr_{n-1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in Y_{d,n-1}(q)$
- $tr_n(\alpha t_n^m) = x_m \cdot tr_{n-1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in Y_{d,n-1}(q)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})[B_n] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})[B_n]] & \twoheadrightarrow & Y_{d,n}(q) & \xrightarrow{tr} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \mapsto & \sigma_i & \mapsto & g_i & & \\
 t_j & \mapsto & t_j & \mapsto & t_j & & 
 \end{array}$$

Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou (normalisation de la trace  $\text{tr}$ )

$z \neq 0$  ,  $z \neq (q-1)\varepsilon$

$$\varepsilon := \text{tr}(e_i) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \quad \forall \quad i=1, \dots, n-1 \quad \text{avec } x_d = x_0 = 1$$

Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou (normalisation de la trace  $\text{tr}$ )

$$\underline{z \neq 0}, \quad \underline{z \neq (q-1)\varepsilon}$$

$$\varepsilon := \text{tr}(e_i) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \quad \forall i=1, \dots, n-1 \quad \text{avec } x_d = x_0 = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad , \quad \alpha \in B_n$$



## Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou (normalisation de la trace $\text{tr}$ )

$$\underline{z \neq 0}, \quad \underline{z \neq (q-1)\varepsilon}$$

$$\varepsilon := \text{tr}(e_i) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \quad \forall i=1, \dots, n-1 \quad \text{avec } x_d = x_0 = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad , \quad \alpha \in B_n$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha \sigma_n) \Rightarrow \Delta = 1 / \omega z$$

## Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou (normalisation de la trace $\text{tr}$ )

$$\underline{z \neq 0}, \quad \underline{z \neq (q-1)\varepsilon}$$

$$\varepsilon := \text{tr}(e_i) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \quad \forall i=1, \dots, n-1 \quad \text{avec } x_d = x_0 = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad , \quad \alpha \in B_n$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha \sigma_n) \Rightarrow \Delta = 1 / \omega z$$

$$\Gamma(\alpha \sigma_n) = \Gamma(\alpha \sigma_n^{-1}) \Rightarrow \omega = \dots$$

## Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou (normalisation de la trace $\text{tr}$ )

$$\underline{z \neq 0}, \quad \underline{z \neq (q-1)\varepsilon}$$

$$\varepsilon := \text{tr}(e_i) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \quad \forall i=1, \dots, n-1 \quad \text{avec } x_d = x_0 = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad , \quad \alpha \in B_n$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha \sigma_n) \Rightarrow \Delta = 1 / \omega z$$

$$\Gamma(\alpha \sigma_n) = \Gamma(\alpha \sigma_n^{-1}) \Rightarrow \omega = \dots$$

$$\text{Rappelons que } g_n^{-1} = q^{-1} g_n + (q^{-1} - 1) e_n$$

## Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou (normalisation de la trace $\text{tr}$ )

$$\underline{z \neq 0}, \quad \underline{z \neq (q-1)\varepsilon}$$

$$\varepsilon := \text{tr}(e_i) = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \quad \forall i=1, \dots, n-1 \quad \text{avec } x_d = x_0 = 1$$

$$\Gamma(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad , \quad \alpha \in B_n$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha \sigma_n) \Rightarrow \Delta = 1 / \omega z$$

$$\Gamma(\alpha \sigma_n) = \Gamma(\alpha \sigma_n^{-1}) \Rightarrow \omega = \dots$$

Rappelons que  $g_n^{-1} = q^{-1} g_n + (q^{-1} - 1) e_n$

$$\text{tr}(\alpha e_n) = \text{tr}(\alpha) \cdot \text{tr}(e_n) \quad \forall \alpha \in \gamma_{d,n}(q)$$

$\Rightarrow$  Système d'équations  
pour  $(x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$   
"E - système"

E-système : Solutions par P. Gérardin  $\# = 2^d - 1$

Solutions du E-système  $\longleftrightarrow$  Sous-ensembles non-vides de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$X_S = (\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{x_0}, x_1, \dots, x_{d-1}) \longleftrightarrow S$$

E-système : Solutions par P. Gérardin  $\# = 2^d - 1$

Solutions du E-système  $\longleftrightarrow$  Sous-ensembles non-vides de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$   
 $X_S = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \longleftrightarrow S$   
 $\quad \quad \quad \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\quad}$

$$\varepsilon = \frac{1}{|S|}$$

E-système : Solutions par P. Gérardin  $\# = 2^d - 1$

Solutions du E-système  $\longleftrightarrow$  Sous-ensembles non-vides de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$X_S = (\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{x_0}, x_1, \dots, x_{d-1}) \longleftrightarrow S$$

$$\varepsilon = \frac{1}{|S|}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{z + (1-q)\varepsilon}{zq}}$$

E-système : Solutions par P. Gérardin  $\# = 2^d - 1$

Solutions du E-système  $\longleftrightarrow$  Sous-ensembles non-vides de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$X_S = (\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}}_1) \longleftrightarrow S$$

$$\varepsilon = \frac{1}{|S|}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{z + (1-q)\varepsilon}{zq}}$$

$$\hat{\Gamma}_S(\hat{\alpha}) := \Gamma_S(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad \forall \alpha \in B_n$$

$\hat{\Gamma}_S : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$  est un invariant de noeuds à poids

Invariant de Tsyumaya-Lambropoulou



E-système : Solutions par P. Gérardin  $\# = 2^d - 1$

Solutions du E-système  $\longleftrightarrow$  Sous-ensembles non-vides de  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$X_S = (\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_{d-1}}_1) \longleftrightarrow S$$

$$\varepsilon = \frac{1}{|S|}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{z + (1-q)\varepsilon}{z^q}}$$

$$\hat{\Gamma}_S(\hat{\alpha}) := \Gamma_S(\alpha) = \Delta^{n-1} \cdot \omega^{\exp(\alpha)} \cdot \text{tr}(\alpha) \quad \forall \alpha \in B_n$$

$\hat{\Gamma}_S : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}$  est un invariant de noeuds à poids  
Invariant de Turaev-Lauda

$B_n \subseteq (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})[B_n]$   
 $\longrightarrow$  Invariant de noeuds classiques

Soit  $S \subseteq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ,  $S \neq \emptyset$  et

$X_S = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$  la solution correspondante du E-système.

Soit  $S \subseteq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ,  $S \neq \emptyset$  et

$X_S = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$  la solution correspondante du E-système.

Proposition (C.-Lambropoulou 2013)

Si  $|S| = 1$  ( $\Leftrightarrow \varepsilon = 1$ ), alors

$$\hat{P}(\hat{\alpha}) = \hat{\Gamma}_S(\hat{\alpha}) \quad \forall \alpha \in B_n$$

pour  $\mathfrak{J} = \mathbb{Z}$ .

Soit  $S \subseteq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ,  $S \neq \emptyset$  et

$x_S = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$  la solution correspondante du E-système.

Proposition (C.-Lambropoulou 2013)

Si  $|S| = 1$  ( $\Leftrightarrow \varepsilon = 1$ ), alors

$$\hat{P}(\hat{\alpha}) = \hat{\Gamma}_S(\hat{\alpha}) \quad \forall \alpha \in B_n$$

pour  $\zeta = z$ .

Proposition (C.-Chmutov - Tablan - Tsyumaya - Karvounis - Lambropoulou 2015)

On a

$$\hat{P}(\hat{\alpha}) = \hat{\Gamma}_S(\hat{\alpha}) \quad \forall \alpha \in B_n \text{ tel que } \hat{\alpha} = \text{noeud}$$

pour  $\zeta = z/\varepsilon$ .