EXPOSÉ AU GROUPE DE TRAVAIL "ALGÈBRE QUANTIQUE"

Catégorification d'une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire construite par Gunter MALLE

I Donnée $\mathbb{Z}$-modulaire.

Définition. Une donnée $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$-modulaire est un couple (S, T) où $S = (S_{i,j})_{i,j \in I} \in \mathrm{Mat}_{|I|}(\mathbb{C})$ $\mathbb{C}$
$T = \mathrm{diag}(t_i)_{i \in I}$ tel que.

(M1) I contient un élément distingué i_0 tq $S_{i_0 i} \neq 0$ pour tout i.

(M2) I admet une involution $i \longmapsto i^*$ telle que $i_0^* = i_0$, $S_{i j^*} = \overline{S_{i,j}}$

(M3) $[S^2, T] = S^4 = (ST)^3 = 1$

(M5) $\forall i, j, k \in I$, $N_{ij}^k = \sum_{\ell \in I} \frac{S_{\ell i} S_{\ell j} \overline{S_{\ell k}}}{S_{\ell i_0}} \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

(M4) $S \, {}^t\overline{S} = 1$, $S = {}^tS$.

Les N_{ij}^k sont les constantes de structure d'une algèbre, appelée algèbre de fusion de la donnée modulaire.

Exemple. $\mathcal{C}$ catégorie $\mathbb{C}$-linéaire :
- → abélienne, monoïdale
- → rigide (i.e dualité)
- → tressée $c_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$
- → enrubannée : $\theta_M : M \longrightarrow M$ tq

$$\theta_{M \otimes N} = (\theta_M \otimes \theta_N) c_{N,M} c_{M,N}$$
$$\theta_{M^*} = (\theta_M)^*$$

②

→ semi-simple, finie,
→ + ...

On pose $I = \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$

- $S_{ij} = \dfrac{\mathrm{Tr}_q(c_{ij} \circ c_{ji})}{\sqrt{\left(\sum_{i \in I} \dim_q(i)^2\right)}}$

  trace quantique

- $t_i = \theta_i^{-1} \in \mathrm{End}(i)^\times = \mathbb{C}^\times$

- $i^* =$ dual de i

- $i_0 = 1_{\mathcal{C}}$ objet unité

Alors (M1), ..., (M5) sont vraies : (M5) est la "formule de Verlinde" ;

$$\text{Algèbre de fusion} = \mathrm{Gr}(\mathcal{C}). \blacksquare$$

"Définition". On dit que $\mathcal{C}$ est une catégorification de la donnée modulaire (S, T) si cette dernière est obtenue comme ci-dessus.

Remarque. On ne peut catégorifier ainsi que des données $\mathbb{N}$-modulaires... $\blacksquare$

Exemple (Malle).

$$d \geqslant 2, \quad I = \{(i,j) \mid 0 \leqslant i < j \leqslant d-1\}$$

- $t^{\mathrm{Malle}}_{i,j} = \zeta^{ij}$

- $S^{\mathrm{Malle}}_{(i,j),(i',j')} = \dfrac{\pm 1}{d}\left(\zeta^{-ij'-ji'} - \zeta^{-ii'-jj'}\right)$

Proposition. C'est une donnée $\mathbb{Z}$-modulaire

OBJECTIF DE L'EXPOSÉ. Catégorifier la donnée $\mathbb{Z}$-modulaire de Malle.

Question. Pourquoi ?

I) Digression : groupes réductifs finis

p premier, $q = p^{\alpha}$

G groupe réductif sur $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}_p$

$F : G \longrightarrow G$ Frobenius

$$G^F = \{ g \in G \mid F(g) = g \} = G(\mathbb{F}_q).$$

Exemples. (1) $G = GL_n(\mathbb{F})$

$$F : (a_{ij}) \longmapsto (a_{ij}^q)$$

$$G^F = GL_n(\mathbb{F}_q)$$

(2) $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$, $SO_n^{(\pm)}(\mathbb{F}_q)$, ..., $E_8(\mathbb{F}_q)$. ■

$\rightsquigarrow$ $\exists$ B Borel F-stable $\left(\text{si } G = GL_n,\ B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right.$

$\exists$ $T \subset B$ tore maximal F-stable $\left(T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right)$

$W = N_G(T)/T$: groupe de Weyl $(W \simeq \mathfrak{S}_n)$

Hyp. $F|_W = \mathrm{Id}_W$.

$w \in W \rightsquigarrow X(w) = \{ gB \in G/B \mid g^{-1}F(g) \in BwB \}$, $G^F \circlearrowleft X(w) \circlearrowleft F$

Définition (Deligne-Lusztig). Une représentation de G^F est dite *unipotente* si elle apparaît dans un $H_c^i(X(w), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Unip}(G^F) \subset \mathrm{Irr}(G^F)$.

(4) **Théorème (Digne-Michel, Lusztig)**

Si $\rho \in \mathrm{Unip}(G^F)$, $\exists!\ \zeta_\rho \in \mu_\infty$ tq, $\forall w, \forall i$, les valeurs propres de F sur $H^i_c(X(w))_\rho$ sont de la forme $\zeta_\rho\, q^{k/2}$.

Faisceaux-caractères.

Lusztig a construit une famille $\mathrm{FCar}(G)$ de faisceaux pervers simples G-équivariants sur G.

appelés *faisceaux-caractères*.

Si $A \in \mathrm{FCar}(G)^F$, $\varphi : F^*A \longrightarrow A$

$$\chi_{A,\varphi}(g) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \,\mathrm{Tr}\left(\mathcal{H}^i_g(\varphi), \mathcal{H}^i_g(A)\right)$$

$g \in G^F$

$\mathrm{FCarUni}(G)^F \subset \mathrm{FCar}(G)^F$

$\uparrow$ *faisceaux-caractères unipotents.*

Théorème (Lusztig) (Shoji). (a) $\overline{\mathbb{Q}}_\ell\,\mathrm{Unip}(G^F) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell\,\mathrm{FCarUni}(G^F)$

(b) La matrice de passage S est diagonale par blocs (familles).

(c) Si $\mathcal{F}$ est une famille, notons $S(\mathcal{F})$ le bloc correspondant et $T(\mathcal{F}) = \mathrm{diag}(\zeta_\rho)_{\rho \in \mathcal{F}}$. C'est une donnée $\mathbb{N}$-modulaire.

(d) $\exists$ groupe fini $\Gamma_{\mathcal{F}}$ tel que $\mathrm{Fib}_{\Gamma_{\mathcal{F}}}(\Gamma_{\mathcal{F}})$ ← fibrés $\Gamma_{\mathcal{F}}$-équivariants sur $\Gamma_{\mathcal{F}}$.

catégorifie $(S(\mathcal{F}), T(\mathcal{F}))$.

<u>Exemples</u>. (1) $G^F = GL_n(\mathbb{F}_q)$

$\mathrm{Unip}(G^F) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(W) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Part}(n)$

$\rho_\lambda \longleftrightarrow \lambda$

- $\zeta_{\rho_\lambda} = 1$

longueur du crochet

- $\deg(\rho_\lambda) = q^{\sum (i-1)\lambda_i} \prod_{\square \in Y(\lambda)} \left(\frac{q^{hk(\square)} - 1}{q - 1} \right)$

diagramme de Young

- $S = \mathrm{Id}$
- Familles triviales, $\Gamma_{\mathcal{F}} = 1$.

(2) $G^F = Sp_4(\mathbb{F}_q)$, $W = W(B_2)$: isométries du carré

$\mathrm{Unip}(G^F) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W) \cup \{cusp\}$

- $\zeta_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \in \mathrm{Irr}(W) \\ -1 & \text{si } \rho = cusp \end{cases}$

- Une famille à 4 éléments $\mathcal{F}$.

$$S(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\Gamma_{\mathcal{F}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $\blacksquare$

<u>Constat (Lusztig, Broué-Malle-Michel, 1993)</u>

On doit pouvoir tout reconstruire à partir de W et, pourquoi pas, on doit pouvoir partir de W groupe de réflexions complexes !

- Lusztig : H_3, H_4, diédral
- Malle : $G(d,1,n)$

Exemple de l'exposé : $n = 1$...

6

III Double de Drinfeld de l'algèbre de Taft :

- $d \geqslant 2$, $\langle \zeta \rangle = \mu_d$
- $B = \mathbb{C}\langle K, E \mid K^d = 1 , E^d = 0 , KE = \zeta EK \rangle$

Algèbre de Taft

$$= \bigoplus_{i,j=0}^{d-1} \mathbb{C} K^i E^j = \bigoplus_{i,j=0}^{d-1} \mathbb{C} E^i K^j$$

- $\Delta : B \longrightarrow B \otimes B$

  $E \longmapsto 1 \otimes E + E \otimes K$

  $K \longmapsto K \otimes K$ (élément grouple)

- $\varepsilon : B \longrightarrow \mathbb{C}$

  $E \longmapsto 0$

  $K \longmapsto 1$

- $S : B \longrightarrow B$ anti-automorphisme

  $K \longmapsto K^{-1}$

  $E \longmapsto -EK^{-1}$

Proposition. $(B, \Delta, \varepsilon, S)$ est une algèbre de Hopf.

Double de Drinfeld. $D(B) \underset{e.v.}{=} (B^*)^{cop} \otimes B$

$$= \mathbb{C}\langle E, F, K, z \mid E^d = F^d = 0,\ K^d = z^d = 1,\ z \text{ est central},\ KE = \zeta EK,\ KF = \zeta^{-1} FK,\ [E,F] = K - z K^{-1} \rangle$$

Proposition. $D(B)$ est une algèbre de Hopf.

Remarques. (1) $\Delta(z) = z \otimes z$

(2) $S^2(x) = K x K^{-1}$; $\Delta(K) = K \otimes K$
(on dit que K est un pivot).

(3) Lien avec $U_q(sl_2)$. $q = \sqrt[d]{3}$

$$U_q(sl_2) = \mathbb{C}\left\langle E_0, F_0, K_0^{\pm 1} \;\middle|\; \begin{array}{l} K_0 E_0 = q^2 E_0 K_0 \\ K_0 F_0 = q^{-2} F_0 K_0 \\ [E_0, F_0] = \dfrac{K_0 - K_0^{-1}}{q - q^{-1}} \end{array} \right\rangle$$

pas de relations

$$Z_0 = \mathbb{C}[E_0^d, F_0^d, K_0^d] \subset Z(U_q(sl_2))$$

$$U_q(sl_2) = \bigoplus_{i,j,k=0}^{d-1} Z_0 \cdot E^i F^j K^k$$

$$sp : \begin{array}{rcl} Z_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ E_0^d & \longmapsto & 0 \\ F_0^d & \longmapsto & 0 \\ K_0^d & \longmapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D(B) & \longrightarrow & U_q(sl_2) \otimes^{sp}_{Z_0} \mathbb{C} \\ E & \longmapsto & \overline{E_0} \\ F & \longmapsto & \overline{F_0} \\ K & \longmapsto & (q - q^{-1})\, \overline{K_0} \\ z & \longmapsto & 1 \end{array}$$

⑧

IV Catégorie de modules

* **Modules simples** $\quad 1 \leqslant \ell \leqslant d, \ p \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_{\ell,p}) = \ell$$

$$\begin{aligned}
D(B) &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_{\ell,p}) \\
K &\longmapsto \zeta^{p}\, \mathrm{diag}(\zeta^{\ell-1}, \zeta^{\ell-2}, \dots, \zeta, 1) \\
z &\longmapsto \zeta^{2p+\ell-1}\, \mathrm{Id}_{M_{\ell,p}} \\
E &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \\
F &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \alpha_1^{(\ell,p)} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\ell-1}^{(\ell,p)} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec $\alpha_i^{(\ell,p)} \neq 0$ choisis tels que ça marche (une seule solution).

Lemme. Soit v tel que $K \cdot v = \xi v$.

$D(B)$-module M $\ni$

Alors $\quad K \cdot (Ev) = \zeta \xi (Ev)$

$\quad\quad\quad K \cdot (Fv) = \zeta^{-1} \xi (Fv)$.

Théorème facile.

$$\{1,2,\dots,d\} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(D(B))$$
$$(\ell\ ,\ p) \longmapsto M_{\ell,p}$$

Notons $P_{\ell,p}$ l'enveloppe projective de $M_{\ell,p}$

Théorème moins facile.

(a) Si $\ell = d$, $P_{d,p} = M_{d,p}$

(b) Si $\ell \leqslant d-1$, $\mathrm{Rad}^3(P_{\ell,p}) = 0$ et

$P_{\ell,p}/\mathrm{Rad}(P_{\ell,p})$	$M_{\ell,p}$
$\mathrm{Rad}(P_{\ell,p})/\mathrm{Rad}^2(P_{\ell,p})$	$M_{d-\ell,\ell+p} \oplus M_{d-\ell,\ell+p}$
$\mathrm{Rad}^2(P_{\ell,p})$	$M_{\ell,p}$

* <u>Produit tensoriel</u>.

- $M_{\ell,p} \otimes M_{1,q} \simeq M_{\ell,p+q}$
- $M_{\ell,p} \otimes M_{2,0} \simeq \begin{cases} M_{\ell+1,p} \oplus M_{\ell-1,p+1} & \text{si } 2 \leqslant \ell \leqslant d-1 \\ P_{1,p} & \text{si } \ell = d \end{cases}$

10

* Structures supplémentaires

$(i)_\zeta = 1+\zeta+\dots+\zeta^{i-1}$

$(i)!_\zeta = (1)_\zeta (2)_\zeta \dots (i)_\zeta$

→ R-matrice : $(\alpha_i)_{i\in I}$ base de B

$(\alpha_i^*)_{i\in I}$ base duale de B^*

$$R = \sum_{i\in I} (1\otimes \alpha_i)\otimes(\alpha_i^*\otimes 1) \in D(B)\otimes D(B)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{i,j,k=0}^{d-1} \frac{\zeta^{(i-k)(i+j)-i(i+1)/2}}{(i)!_\zeta} E^iK^j \otimes \zeta^{-k}F^iK^k$$

Fait (Drinfeld).
- $R\,\Delta(x)\,R^{-1} = \Delta^{op}(x) \overset{\text{déf}}{=} \tau(\Delta(x))$
- $(\Delta\otimes \mathrm{Id})(R) = R_{13}R_{23}$
- $(\mathrm{Id}\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}$

$$\tau : D(B)\otimes D(B) \longrightarrow D(B)\otimes D(B)$$
$$a\otimes b \longmapsto b\otimes a$$

Corollaire. $D(B)$-mod est tressée.

$$c_{M,N} : M\otimes N \longrightarrow N\otimes M$$
$$m\otimes n \longmapsto \tau(R)(n\otimes m)$$

→ Twist (enrubannage) ?

$$u = \sum_{i\in I} S(\alpha_i^*)\,\alpha_i \in D(B)$$

(élément de Drinfeld)

- $\varepsilon(u) = 1$, $\Delta(u) = (\tau(R)R)^{-1}(u\otimes u)$
- $S^2(b) = u\,b\,u^{-1}$, $\forall b\in D(B)$

Rappel. $S^2(b) = K\,b\,K^{-1}$

Posons $\theta = z K^{-1} u \in Z(D(B))^{\times}$

et vérifie : $\begin{cases} \varepsilon(\theta) = 1 \\ \Delta(\theta) = (\tau(R)R)^{-1}(\theta \otimes \theta) \\ S(\theta) = z^{-1}\theta \end{cases}$

Posons $\theta_M : \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & M \\ m & \longmapsto & \theta m \end{array}$

Alors

$$\theta_{M \otimes N} = (\theta_M \otimes \theta_N)\, c_{N,M}\, c_{M,N}$$

MAIS $\quad \theta_{M^*} \neq (\theta_M)^*$

⟿ Deux traces quantiques : $f \in \mathrm{End}_{D(B)}(M)$

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}_+(f) = \mathrm{Tr}(z^{-1}K f, M) \\ \mathrm{Tr}_-(f) = \mathrm{Tr}(f K^{-1} z, M) \end{cases}$$

⟿ Deux dimensions quantiques :

$$\begin{cases} \dim_+(M) = \mathrm{Tr}_+(\mathrm{Id}_M) \\ \dim_-(M) = \mathrm{Tr}_-(\mathrm{Id}_M) \end{cases}$$

<u>Exercice</u>. $\begin{cases} \dim_+(M_{\ell,p}) = \zeta^{1-\ell-p}\,(\ell)_\zeta \\ \dim_-(M_{\ell,p}) = \zeta^{p}\,(\ell)_\zeta \end{cases}$

$\left(\dim_\pm(M_{d,p}) = 0 \right)$

(12)

Posons $\dim(D(B)\text{-mod}) = \sum_{M \in \mathrm{Irr}\, D(B)} \dim_+(M) \dim_-(M)$

$$= \frac{2d^2}{(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})}$$

V Donnée modulaire.

$$S^+_{(\ell,p),(\ell',p')} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Tr}_+\left(c_{M_{\ell',p'}, M_{\ell,p}} \circ c_{M_{\ell,p}, M_{\ell',p'}}\right)$$

$$= \ldots \text{ (calcul)}$$

$$= \frac{\zeta}{1-\zeta} \zeta^{-\ell\ell'-\ell p'-p\ell'-2pp'} \left(1-\zeta^{\ell\ell'}\right)$$

$$T^+_{(\ell,p)} \overset{\text{déf}}{=} \text{action de } \theta \text{ sur } M_{\ell,p}$$

$$= \ldots \text{ (calcul)}$$

$$= \zeta^{p(p+\ell)}$$

Faits.
$$\begin{cases} T^+_{(d-\ell,\ell+p)} = T^+_{\ell,p} \\ S_{(d-\ell,\ell+p),(\ell',p')} \simeq S_{(\ell,p),(\ell',p')} \end{cases}$$

BOF...

VI Catégorie stable

$$D(B)\text{-stab} = D(B)\text{-mod} / D(B)\text{-proj}.$$

- Objets : $D(B)$-modules
- $\mathrm{Hom}^{st}_{D(B)}(M,N) = \mathrm{Hom}_{D(B)}(M,N) \Big/ \left(\begin{array}{l}\text{morphismes} \\ \text{qui se factorisent} \\ \text{par un module} \\ \text{projectif}\end{array}\right)$

Monoïdale car $PROJ \otimes MOD = PROJ$

$$Gr(D(B)\text{-mod}) = \bigoplus_{(\ell,p)} \mathbb{Z} \cdot [M_{\ell,p}]$$

$$Gr(D(B)\text{-stab}) : \quad [M_{d,p}]_{stab} = 0$$

$$2 \cdot \left([M_{\ell,p}]_{st} + [M_{d-\ell,\, \ell+p}]_{st} \right) = 0$$

$$\mathrm{Rang}\left(Gr(D(B)\text{-stab}) /_{2\text{-torsion}} \right) = \frac{d(d-1)}{2}$$

Posons (artificiellement)

$$\dim(D(B)\text{-stab}) = \frac{1}{2} \dim(D(B)\text{-mod})$$

Soit $\varphi : I = \{(i,j) \mid 0 \leqslant i < j \leqslant d-1\} \longrightarrow \{1, \dots, d-1\} \times \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$(i,j) \longmapsto (j-i,\, i)$$

Théorème (Rouquier - B.) $\ast$ $Gr(D(B)\text{-stab})/_{2\text{-torsion}} = \bigoplus_{(i,j) \in I} \mathbb{Z}\, [M_{\varphi(i,j)}]_{st, 2}$

$\ast$ $S^{\text{Malle}}_{(i,j),(i',j')} = \dfrac{\pm\sqrt{-\zeta}}{\sqrt{\dim(D(B)\text{-stab})}} \quad S^{+}_{\varphi(i,j),\, \varphi(i',j')}$

$\ast$ $t^{\text{Malle}}_{i,j} = T^{+}_{\varphi(i,j)}$

VII Questions.

* **Centre** : $\mathcal{C}$ monoïdale

$Z(\mathcal{C})$ centre de Drinfeld :

- Objets : $\left(M, \left(c_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M\right)_{N \in \mathcal{C}}\right)$

+ propriétés

- Morphismes : ...

$$\begin{tikzcd}
D(B)\text{-mod} \arrow[r, phantom, "="] \arrow[dd] & Z(B\text{-mod}) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d] & B\text{-mod} \arrow[d] \\
 & Z(B\text{-stab}) \arrow[r] & B\text{-stab} \\
D(B)\text{-STAB} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$D(B)\text{-STAB} = D(B)\text{-mod} \Big/ \left\langle M \text{ tq } \mathrm{Res}_B^{D(B)} M \text{ est projectif} \right\rangle$$

$$\mathrm{Gr}\left(D(B)\text{-stab}\right)\Big/_{2\text{-torsion}} = \mathrm{Gr}\left(D(B)\text{-STAB}\right). \qquad (!)$$

Question 1. $D(B)\text{-STAB} \simeq Z(B\text{-stab})$?
(et pour B qcq ?)

* **Dimension** :

Question 2. Comment justifier que
$\dim\left(D(B)\text{-stab}\right) = \frac{1}{2} \dim\left(D(B)\text{-mod}\right)$?

* Données $\mathbb{Z}$-modulaires.

Question 3. Théorie générale de la catégorification ?

* $G(d,1,n)$

$$A = \left(\zeta^{-ij}\right)_{0 \leq i,j \leq d-1}$$

$n=1$: $\quad S^{\text{Malle}} = \dots \Lambda^2 A$

$\hookrightarrow$ catégorification par "$U_q(\mathfrak{sl}_2)$"

n quelconque : $\quad S^{\text{Malle}} = \dots \Lambda^k A \quad$ pour différentes valeurs de k

Question 4. Catégorifier $\Lambda^k A$?