Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux et idéaux - TD 2

1. Soit A un sous-ensemble d'un anneau R. Montrer que (A) est l'intersection de tous les idéaux de R qui contiennent A.

2. Soit R un anneau. Montrer que $\{0_R\}$ est un idéal de R et que $R/\{0_R\}$ est isomorphe à R.

3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n\mathbb{Z} = (n)$) est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}_n$ des classes d'équivalence de résidu modulo n.

4. Montrer que l'anneau $\mathbb{Q}[x]/(x-a)$ où $a \in \mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

5. Soient I, J des idéaux de R tels que $I \subseteq J$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} (R/I)/(J/I) & \to & R/J \\ (r+I)+(J/I) & \mapsto & r+J \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux ($2^{\text{ème}}$ *Théorème d'isomorphismes d'anneaux*).

6. Pour les idéaux principaux $I = (m)$ et $J = (n)$ de $\mathbb{Z}$ (avec $mn \neq 0$), calculer les idéaux $I \cap J$, $I + J$ et IJ.

7. Montrer que si R est un anneau intègre, alors $R[x]$ est intègre. Si R est un corps, est-ce que $R[x]$ est un corps ?

8. Montrer que si R est un anneau intègre fini, alors R est un corps.

9. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R.

10. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors soit f est un monomorphisme, soit $f(r) = 0_S$ pour tout $r \in R$.

11. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il n'existe pas d'idéal I de $\mathbb{Z}$ tel que $(p) \subsetneq I \subsetneq \mathbb{Z}$.