Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Derniers remarques sur les anneaux - TD 5

1. Si R est un anneau (commutatif) avec $\operatorname{car} R = p$ où p est un nombre premier, alors

$$(a+b)^p = a^p + b^p \quad \text{et} \quad (a-b)^p = a^p - b^p$$

pour tous $a, b \in R$.

2. Si R est un anneau intègre avec $\operatorname{car} R = p$ où p est un nombre premier, alors l'application (de Frobenius) $F : R \to R$, $a \mapsto a^p$ est un monomorphisme.

3. Soit $I := \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = f(-1) = 0\}$.

(a) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Est-ce que I est principal ?

(c) Trouver $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $I = (p(x))$.

(d) Est-ce que I est un idéal premier ?

(e) Est-ce que $\mathbb{Q}[x]/I$ est un corps ?

4. Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ avec $a_n \neq 0$. S'il existe un nombre premier p tel que

(i) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$,

(ii) p ne divise pas a_n, et

(iii) p^2 ne divise pas a_0,

alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ ("critère de Eisenstein").