Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Extensions de corps - TD 8

1. Décrire $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Est-ce que $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$?

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ et $\mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}$. Est-ce que $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\omega\sqrt{2})$?

3. Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})]$.

4. Soient ρ_1, ρ_2 les racines d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[x]$. Montrer que $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2) = \mathbb{Q}(\rho_1)$. Quand est-ce que $\mathbb{Q}(\rho_1)$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2 ?

5. Soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ les racines du polynôme $x^4 - 2$. Décrire $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$.

6. Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les racines du polynôme $x^3 - 1$. Décrire $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

7. Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les racines d'un polynôme de degré 3 dans $\mathbb{Q}[x]$. Si $[\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) : \mathbb{Q}] = 3$, montrer que $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$.

8. Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques. Montrer que $[\mathbb{A} : \mathbb{Q}] = \infty$ (indication: supposer que $[\mathbb{A} : \mathbb{Q}] = n$ et considérer le polynôme $x^{n+1} - 2$).

9. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas algébriquement clos de deux façons différentes.

10. Si F est un corps fini, alors F n'est pas algébriquement clos.

11. Si F est un corps, t est un élément transcendant sur F et $f_1(t) = f_2(t)$ pour certains $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$, alors $f_1(x) = f_2(x)$. Montrer que cela n'est pas vrai pour des éléments algébriques.

12. Si F est un corps et t est un élément transcendant sur F, alors $F(t)$ n'est pas algébriquement clos.