Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2014/2015**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Corps finis et polynômes cyclotomiques - TD 9

1. Soit F un corps et $f(x) \in F[x]$, $\deg f(x) \geq 1$. Montrer que a est une racine simple de $f(x)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

2. Montrer que les sous-corps premier d'un corps fini est l'ensemble des points fixes de l'automorphisme de Frobenius.

3. Montrer qu'il n'y a pas de corps avec 15516 éléments.

4. Montrer que $\mathbb{F}_8$ n'a pas de sous-corps isomorphe à $\mathbb{F}_4$.

5. Est-ce qu'il existe un homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{F}_8$ à $\mathbb{Z}_8$?

6. Donner un exemple d'un corps infini de caractéristique p, où p est un nombre premier.

7. Calculer $\Phi_6(x)$ et $\Phi_8(x)$.

8. Calculer le polynôme cyclotomique $\Phi_p(x)$, où p est un nombre premier.

9. Trouver une extension E de $\mathbb{Q}$ tel que $[E : \mathbb{Q}] = 30$.

10. Montrer que $\Phi_5(x)$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

11. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f \geq 1$. Si $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$, alors $\deg f = 1$ ou $\deg f = 2$. Si $f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$, alors $f(x)$ est est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si $a = 0$ ou $b^2 - 4ac < 0$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Construire un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ de degré n.