Polynômes, relations d'équivalence et anneaux - TD 1

1. Soit $f : A \to B$ une application entre deux ensembles A et B. Montrer que :
(a) f est injective $\Leftrightarrow |f^{-1}(b)| \leqslant 1$ pour tout $b \in B$;
(b) f est surjective $\Leftrightarrow |f^{-1}(b)| \geq 1$ pour tout $b \in B$;
(c) f est bijective $\Leftrightarrow |f^{-1}(b)| = 1$ pour tout $b \in B$.

2. Calculer pgcd(f, g) et ppmc(f, g) pour
(a) $f = 96 \in \mathbb{Z}$ et $g = 180 \in \mathbb{Z}$;
(b) $f(x) = x^2 + 4x + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ et $g(x) = x^2 + 5x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$;
(c) $f(x) = 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ et $g(x) = x^2 - 1/4 \in \mathbb{Q}[x]$;
(d) $f(x) = x^3 - 1 \in \mathbb{R}[x]$ et $g(x) = x^4 - 1 \in \mathbb{R}[x]$.

3. Soeint $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Montrer que si $\deg f(x) = 1$, alors soit $f(x)$ divise $g(x)$ soit les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux.

4. Soit $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Montrer que si $\deg f(x) \in \{2, 3\}$ et $f(x)$ n'a pas de racines dans $\mathbb{F}$, alors $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{F}[x]$.

5. Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Le polynôme $f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x] \Leftrightarrow \deg f(x) = 1$ ou $\deg f(x) = 2$ et $f(x)$ n'a pas de racines réelles.

6. Déterminer si les relations suivantes sur $\mathbb{R}$ sont réflexives, symétriques ou transitives :
(a) $a \sim b \Leftrightarrow ab = 0$;
(b) $a \sim b \Leftrightarrow ab \neq 0$;
(c) $a \sim b \Leftrightarrow |a - b| < 5$.

7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit $a \sim b$ si et seulement si $f(a) = f(b)$.
(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
(b) Décrire la classe d'équivalence de 3.

8. Pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, on définit $(a, b) \sim (c, d)$ si et seulement si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Décrire la classe d'équivalence de $(0, 0)$.
(c) Donner cinq éléments dans la classe d'équivalence de $(1, 0)$.

9. Soit n un entier positif. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $a \sim b$ si et seulement si n divise $a - b$.
(a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
(b) Montrer que $a \sim b$ si et seulement si a et b ont le même résidu module n.
(c) Déduire qu'il existe n classes d'équivalence pour $\sim$: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots \overline{n-1}$.

10. Montrer que $\mathbb{Z}_n$ est un anneau commutatif avec $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ et $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$.

11. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\}$ est un anneau commutatif.

12. Soit R un anneau. Montrer que $R[x]$ est un anneau, qui est commutatif si et seulement si R est commutatif.

13. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$, où R est un anneau, est un anneau non-commutatif.

14. Si R_1, R_2 sont des anneaux, montrer qu'il existe une structure d'anneau sur $R_1 \times R_2$.