**Université de Versailles - Saint Quentin** **Année 2016/2017**
**L3 Algèbre** **Maria Chlouveraki**

**Idéaux et anneaux quotients - TD 3**

**1.** Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux et soit $J$ un idéal de $S$. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de $R$.

**2.** Montrer que l'intersection d'une famille non-vide d'idéaux de $R$ est un idéal de $R$. Est-ce que cela est vrai pour l'union?

**3.** Donner un exemple d'un sous-anneau de $\mathbb{Q}[x]$ qui n'est pas un idéal de $\mathbb{Q}[x]$.

**4.** Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si $m$ divise $n$, alors $(n) \subseteq (m)$.

**5.** Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, et $I = (m, n)$ l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par $m$ et $n$. Montrer que $(m, n) = (\mathrm{pgdc}(m, n))$ (utiliser le fait que $\mathrm{pgdc}(m, n) = am + bn$ pour certains $a, b \in \mathbb{Z}$).

**6.** Soit $A$ un sous-ensemble d'un anneau $R$. Montrer que $(A)$ est l'intersection de tous les idéaux de $R$ qui contiennent $A$. En déduire que $(A)$ est le plus petit idéal de $R$ qui contient $A$.

**7.** Montrer que l'idéal $(2, x)$ de $\mathbb{Z}[x]$ n'est pas principal.

**8.** Soit $R$ un anneau. Montrer que $R/\{0_R\}$ est isomorphe à $R$.

**9.** Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n\mathbb{Z} = (n)$) est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}_n$ des classes d'équivalence de résidu modulo $n$.

**10.** Soit $R$ un anneau et $a \in R$. Montrer que l'anneau $R[x]/(x - a)$ est isomorphe à $R$.

**11.** Soit $R$ un anneau. Montrer que l'anneau $R[x, y]/(x^2 - y)$ est isomorphe à $R[x]$.

**12.** Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[i]$.

**13.** Soient $I, J$ des idéaux de $R$ tels que $I \subseteq J$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} (R/I)/(J/I) & \to & R/J \\ (r + I) + (J/I) & \mapsto & r + J \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux ($2^{\text{ème}}$ *Théorème d'isomorphismes d'anneaux*).