Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2016/2017**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Idéaux premiers et maximaux, anneaux principaux - TD 5

1. Montrer que $(2, x)$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}[x]$ de 2 façons.

2. Montrer que $(2x)$ n'est pas un idéal premier de $\mathbb{Z}[x]$ de 2 façons.

3. Soit R un anneau fini. Montrer que tout idéal premier de R est maximal.

4. Soient I, J des idéaux de R tels que $I \subseteq J$. Montrer que :
(a) l'idéal J/I de R/I est premier si et seulement si J est premier ;
(b) l'idéal J/I de R/I est maximal si et seulement si J est maximal .

5. Soit k un corps et soient $f(x), g(x) \in k[x]$ avec $g(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $q(x), r(x) \in k[x]$ tels que
(i) $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, et
(ii) $r(x) = 0$ ou $\deg r(x) < \deg g(x)$.
De plus, $q(x)$ et $r(x)$ sont uniques *(indication: récurrence sur* $\deg f$*)*.

6. Soit k un corps. Montrer que $k[x]$ est un anneau principal.

7. Soit k un corps et soit $f(x) \in k[x]$ avec $f(x) \notin k$ ($f(x) \neq 0$ et $\deg f(x) \geq 1$). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est premier ;
(2) l'idéal $(f(x))$ de $k[x]$ est maximal ;
(3) $f(x)$ est irréductible dans $k[x]$.