Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2016/2017**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Extensions algébriques et corps algébriquement clos - TD 9

1. Soit K/F et $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des éléments algébriques sur F, alors $F(c_1, c_2, \ldots, c_n)/F$ est finie et $F[c_1, c_2, \ldots, c_n] = F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

2. Soit K/F et $a, b \in K$. Si a est algébrique sur F et b est algébrique sur $F(a)$, alors b est algébrique sur F.

3. Soient ρ_1, ρ_2 les racines d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[x]$. Montrer que $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2) = \mathbb{Q}(\rho_1)$. Quand est-ce que $\mathbb{Q}(\rho_1)$ est une extension de $\mathbb{Q}$ de degré 2 ?

4. Soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ les racines du polynôme $x^4 - 2$. Décrire $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$.

5. Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les racines du polynôme $x^3 - 1$. Décrire $\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

6. Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les racines d'un polynôme de degré 3 dans $\mathbb{Q}[x]$. Si $[\mathbb{Q}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) : \mathbb{Q}] = 3$, montrer que $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$.

7. Est-ce que $\mathbb{R}$ a des extensions algébriques ?

8. Est-ce que $\mathbb{C}$ a des extensions algébriques ?

9. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas algébriquement clos de deux façons différentes.

10. Si F est un corps fini, alors F n'est pas algébriquement clos.

11. Si F est un corps, t est un élément transcendant sur F et $f_1(t) = f_2(t)$ pour certains $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$, alors $f_1(x) = f_2(x)$. Montrer que cela n'est pas vrai pour des éléments algébriques.

12. Si F est un corps et t est un élément transcendant sur F, alors $F(t)$ n'est pas algébriquement clos.