Courbes algébriques - TD 1

1. Soient k un corps et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$. Montrez que

(a) $k[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas un anneau principal pour $n \geq 2$;

(b) $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ est un idéal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

2. Soient k un corps infini et $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Si $F(a_1, \ldots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n$, alors $F = 0$. Montrez que cela n'est pas vrai si k est un corps fini.

3. Montrez que les sous-ensembles algébriques affines propres de $\mathbb{A}_k^1$ sont finis.

4. Montrez que :

(a) Si $\{I_\alpha\}$ est une collection d'idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$, alors $\bigcap_\alpha V(I_\alpha) = V(\bigcup_\alpha I_\alpha) = V(\sum_\alpha I_\alpha)$; donc l'intersection d'ensembles algébriques affines est un ensemble algébrique affine.

(b) Si I, J sont deux idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$, alors $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(\{FG \mid F \in I, G \in J\}) = V(IJ)$; donc l'union finie d'ensembles algébriques affines est un ensemble algébrique affine.

(c) Tout sous-ensemble fini de $\mathbb{A}_k^n$ est un ensemble algébrique affine.

(d) Si k est un corps fini, alors tout sous-ensemble de $\mathbb{A}_k^n$ est un ensemble algébrique affine.

(e) Trouvez un exemple d'une union dénombrable d'ensembles algébriques affines qui n'est pas un ensemble algébrique affine.

5. Montrez que les ensembles suivants sont des ensembles algébriques affines :

(a) $\{(t, t^2) \in \mathbb{A}_k^2 \mid t \in k\}$;

(b) $\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}_k^3 \mid t \in k\}$;

(c) un cercle dans $\mathbb{R}^2$;

(d) $\{(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{A}_\mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$;

(e) $\{(t, 1/t) \in \mathbb{A}_\mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}^*\}$;

(f) $\{(t-1, t^2-1) \in \mathbb{A}_\mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$.

6. Soient k un corps, $F \in k[X, Y]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et L une droite dans $\mathbb{A}_k^2$. Si $C := V(F)$ et $L \not\subseteq C$, alors $|L \cap C| \leq n$. (Indication : Supposez que $L = V(Y - aX - b)$, et considérez $F(X, aX + b) \in k[X]$.)

7. Montrez que les ensembles suivants ne sont pas des ensembles algébriques affines :

(a) $\{(t, \sin(t)) \in \mathbb{A}_\mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\{(\cos(t), \sin(t), t) \in \mathbb{A}_\mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\{(t, e^t) \in \mathbb{A}_\mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$;

(d) $\{(z, w) \in \mathbb{A}_\mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, où $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Soient k un corps algébriquement clos et $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme de degré positif. Montrez que $\mathbb{A}_k^n \setminus V(F)$ est infini si $n \geq 1$, et $V(F)$ est infini si $n \geq 2$. En déduire que le complément de tout sous-ensemble algébrique affine propre de $\mathbb{A}_k^n$ est infini.

9. Si k est un corps infini, montrez que $\mathbb{A}_k^n$ est irréductible.

10. Déterminez si les ensembles algébriques affines suivants sont irréductibles. Sinon, décomposez les en facteurs irréductibles :

(a) $\{(a, b)\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(b) $\{(a, b), (c, d)\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(c) $V(Y - X) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(d) $V(Y^2 - X^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$;

(e) $V(Y^2 + X) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.