Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2012/2013**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 3

1. Soit R un anneau commutatif et I, J des idéaux de R. On a :

(a) $\mathrm{rad}(IJ) = \mathrm{rad}(I \cap J) = \mathrm{rad}(I) \cap \mathrm{rad}(J)$;

(b) $\mathrm{rad}(I) = (1) \Leftrightarrow I = (1)$;

(c) $\mathrm{rad}(I + J) = \mathrm{rad}(\mathrm{rad}(I) + \mathrm{rad}(J))$;

(d) Si I est un idéal premier, alors $\mathrm{rad}(I^n) = I$ pour tout $n > 0$.

2. Soit $I = (X + Y, Y^2) \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Calculer $\mathrm{rad}(I)$. Vérifier que $I(V(I))) = \mathrm{rad}(I)$.

3. On suppose que k est algébriquement clos et que F est un polynôme dans $k[X_1, \dots, X_n]$ qui n'est pas constant. Si $F = F_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ est la décomposition de F en facteurs irréductibles, alors $V(F) = V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$ est la décomposition de $V(F)$ en composantes irréductibles et $I(V(F)) = (F_1 \cdots F_r)$.

4. Calculer $I(V(F))$ dans les cas suivants. Déterminer si $V(F)$ est irréductible.

(a) $F = X^4 \in \mathbb{C}[X]$;

(b) $F = X^4 \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$;

(c) $F = (X - Y)^2 \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$;

(d) $F = (X - Y)^2 - Z^2 \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$;

(e) $F = X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$;

(f) $F = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

5. Décomposer $V(X^2 + Y^2 - 1,\, X^2 + Z^2 - 1) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ en composantes irréductibles.

6. Soit $V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \,|\, t \in \mathbb{C}\}$. Calculer $I(V)$ et montrer que V est irréductible.

7. Soit $I = (Y^2 - X^2,\, Y^2 + X^2) \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Calculer $V(I)$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X, Y]/I)$.

8. Soit k un corps et $F \in k[X]$ un polynôme de degré $n > 0$. Montrer que les résidus $\bar{1}, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{n-1}$ forment une base de $k[X]/(F)$ sur k.

9. Soit V un ensemble algébrique dans $\mathbb{A}^n_k$.

(a) Soit $P \in \mathbb{A}^n_k \setminus V$. Il existe $F \in I(V)$ tel que $F(P) = 1$ (Indication : $I(V) \neq I(V \cup \{P\})$).

(b) Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{A}^n_k \setminus V$. Il existe $F_1, \dots, F_r \in I(V)$ tels que $F_i(P_j) = \delta_{ij}$.

10. On suppose que k est algébriquement clos et que I est un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. L'ensemble algébrique $V(I)$ est fini si et seulement si $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un k-espace vectoriel de dimension finie. Dans ce cas, $|V(I)| \leq \dim_k(k[X_1, \dots, X_n]/I)$.

11. Soit $V = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ et $W = V(X + Y) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Montrer que $t \mapsto (t, -t)$ est une fonction régulière dans $\mathrm{Reg}(V, W)$.