

Courbes algébriques - TD 1

1. Si V est une partie algébrique de \mathbb{A}^n , alors $Z(I(V)) = V$. Si W est aussi une partie algébrique de \mathbb{A}^n , on a $I(V) = I(W)$ si et seulement si $V = W$.
2. Montrez que les ensembles suivants sont des ensembles algébriques :
 - (a) $\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \mid t \in \mathbb{C}\}$;
 - (b) $\{(t, 1/t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \mid t \in \mathbb{C}^*\}$;
 - (c) $\{(t-1, t^2-1) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$;
 - (d) $\{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $F \in k[X, Y]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ et L une droite dans \mathbb{A}^2 . Si $C := Z(F)$ et $L \not\subseteq C$, alors $|L \cap C| \leq n$ (indication : supposez que $L = Z(Y - aX - b)$ et considérez $F(X, aX + b) \in k[X]$). Soit maintenant V une partie algébrique de \mathbb{A}^2 . Si $L \not\subseteq V$, alors $|L \cap V| < \infty$.
4. Montrez que les ensembles suivants ne sont pas des ensembles algébriques :
 - (a) $\{(t, \sin t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$;
 - (b) $\{(t, e^t) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \mid t \in \mathbb{C}\}$;
 - (c) $\{(z, w) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, où $|x + iy|^2 = x^2 + y^2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
5. Trouvez un exemple d'une union dénombrable d'ensembles algébriques qui n'est pas un ensemble algébrique.
6. Soient k un corps algébriquement clos et $F, G \in k[X, Y]$.
 - (a) Si F, G n'ont pas de facteur en commun, alors $Z(F, G) = Z(F) \cap Z(G)$ est un ensemble fini de points.
 - (b) Si F est un polynôme irréductible, alors $I(Z(F)) = (F)$ et $Z(F)$ est irréductible.
 - (c) Si F n'est pas constant et $F = F_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ est la décomposition de F en facteurs irréductibles, alors $Z(F) = Z(F_1) \cup \cdots \cup Z(F_r)$ et $I(Z(F)) = (F_1 \cdots F_r)$.
7. Déterminez si les parties algébriques suivantes de \mathbb{A}^2 sont irréductibles :
 - (a) $\{(a, b)\}$;
 - (b) $\{(a, b), (c, d)\}$;
 - (c) $Z(F)$ où $F \in \{Y - X, Y^2 - X^2, (Y - X)^2, Y^2 + X, Y^2 + X^2\}$;
 - (d) $Z(Y^4 - X^2, Y - X)$.
8. Soit k un corps algébriquement clos. Les parties algébriques irréductibles de \mathbb{A}^2 sont : \emptyset, \mathbb{A}^2 , points et les ensembles algébriques irréductibles de la forme $Z(F)$, où F est un polynôme irréductible et $Z(F)$ est infini.
9. Soit $I = (X + Y, Y^2) \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Calculez \sqrt{I} . Vérifiez que $I(Z(I)) = \sqrt{I}$.