Courbes algébriques - TD 2

Soit k un corps algébriquement clos.

1. Soit $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme de degré positif. Montrer que $\mathbb{A}^n \setminus Z(F)$ est infini si $n \geq 1$, et $Z(F)$ est infini si $n \geq 2$. En déduire que toute partie ouverte de $\mathbb{A}^n$ est infinie.

2. Soit $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $F \notin k$. Si $F = F_1^{n_1} \cdots F_r^{n_r}$ est la décomposition de F en facteurs irréductibles, alors $Z(F) = Z(F_1) \cup \cdots \cup Z(F_r)$ est la décomposition de $Z(F)$ en composantes irréductibles et $I(Z(F)) = (F_1 \cdots F_r)$.

3. Calculer $I(Z(F))$ dans les cas suivants. Déterminer si $Z(F)$ est irréductible.

(a) $F = X^3 \in k[X, Y, Z]$;

(b) $F = (X - Y)^2 - Z^2 \in k[X, Y, Z]$.

4. Soit $V = Z(X^2 - YZ, XZ - X) \in \mathbb{A}^3$. Décomposer V en composantes irréductibles et calculer leurs idéaux premiers.

5. Soit k un corps et $F \in k[X]$ un polynôme de degré $n > 0$. Montrer que les résidus $\bar{1}, \bar{X}, \ldots, \bar{X}^{n-1}$ forment une base de $k[X]/(F)$ sur k.

6. Trouver $F_1, F_2, F_3 \in k[X, Y, Z]$ tels que $Z(F_1, F_2, F_3)$ soit une variété algébrique affine avec $\dim(Z(F_1, F_2, F_3)) = 0, 1, 2, 3$.

7. Dans les cas suivants calculer une base de transcendance de $k(V)$ sur k. En déduire la dimension de V.

(a) $V = Z(X - Y) \subset \mathbb{A}^2$;

(b) $V = Z(X - Y) \subset \mathbb{A}^3$;

(c) $V = Z(X^2 - Y^3) \subset \mathbb{A}^2$;

(d) $V = Z(XY - 1) \subset \mathbb{A}^2$;

(e) $V = Z(X - Y,\, X + Y) \subset \mathbb{A}^2$;

(f) $V = Z(X - Y,\, Z) \subset \mathbb{A}^3$.