Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2013/2014**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 3

1. Dans les cas suivants, calculer l'intersection du sous-espace projectif $p(V) \subset \mathbb{P}^2$ avec $j(\mathbb{A}^2)$ et avec la droite à l'infini :
(a) $V = \{(x, y, z) \mid x + y + \lambda z = 0\}$, $\lambda \in k$;
(b) $V = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$;
(c) $V = \{(x, y, z) \mid x = y,\, z = 0\}$;
(d) $V = \{(x, y, z) \mid x = y = \lambda z\}$, $\lambda \in k^\times$.

2. Montrer que :
(a) si I_1, I_2 sont des idéaux homogènes de $k[X_0, \ldots, X_n]$ avec $I_1 \subseteq I_2$, alors $Z_P(I_2) \subseteq Z_P(I_1)$;
(b) si $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$, alors $I_P(V_2) \subseteq I_P(V_1)$;
(c) si V est une partie algébrique de $\mathbb{P}^n$, alors $Z_P(I_P(V)) = V$;
(d) l'intersection d'une famille de parties algébriques de $\mathbb{P}^n$ est une partie algébrique de $\mathbb{P}^n$;
(e) l'union de deux parties algébriques de $\mathbb{P}^n$ est une partie algébrique de $\mathbb{P}^n$.

3. Si F est un polynôme homogène dans $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$, on pose $F_* := F(X_1, \ldots, X_n, 1) \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Si f est un polynôme dans $k[X_1, \ldots, X_n]$ de degré d, on dénote par f^* le polynôme homogène $X_{n+1}^d f(X_1/X_{n+1}, \ldots, X_n/X_{n+1})$ dans $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. On a :
(a) $(FG)_* = F_* G_*$;
(b) si $F \neq 0$ et r est la plus grande puissance de X_{n+1} qui divise F, alors $X_{n+1}^r (F_*)^* = F$;
(c) $(F + G)_* = F_* + G_*$;
(d) $(fg)^* = f^* g^*$;
(e) $(f^*)_* = f$;
(f) $X_{n+1}^t (f + g)^* = X_{n+1}^r f^* + X_{n+1}^s g^*$, où $r = \deg(g)$, $s = \deg(f)$ et $t = r + s - \deg(f + g)$.

4. Soit V une partie algébrique de $\mathbb{A}^n$, $I = I(V) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$. Soit I^* l'idéal de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ engendré par $\{f^* \mid f \in I\}$. On définit $V^* := Z(I^*) \subseteq \mathbb{P}^n$.

De l'autre côté, soit V une partie algébrique de $\mathbb{P}^n$, $I = I(V) \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Soit I_* l'idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par $\{F_* \mid F \in I\}$. On définit $V_* := Z(I_*) \subseteq \mathbb{A}^n$.

On note $H_\infty := Z(X_{n+1})$ et $U_{n+1} = \mathbb{P}^n \setminus H_\infty$.
(a) Si $V \subseteq \mathbb{A}^n$, alors $j_{n+1}(V) = V^* \cap U_{n+1}$ et $(V^*)_* = V$.
(b) Si $V \subseteq W \subseteq \mathbb{A}^n$, alors $V^* \subseteq W^* \subseteq \mathbb{P}^n$.
(c) Si $V \subseteq W \subseteq \mathbb{P}^n$, alors $V_* \subseteq W_* \subseteq \mathbb{A}^n$.
(d) Si V est irréductible dans $\mathbb{A}^n$, alors V^* est irréductible dans $\mathbb{P}^n$.
(e) SI $V \subseteq \mathbb{A}^n$, alors V^* est la plus petite partie algébrique de $\mathbb{P}^n$ qui contient $j_{n+1}(V)$.
(f) Si $V = \cup_i V_i$ est la décomposition de V en composantes irréductibles dans $\mathbb{A}^n$, alors $V^* = \cup_i V_i^*$ est la décomposition de V^* en composantes irréductibles dans $\mathbb{P}^n$.
(g) Si $\emptyset \subsetneqq V \subsetneqq \mathbb{A}^n$, alors V^* n'a pas de composante qui contient ou est inclue dans H_∞.
(h) Si $V \subseteq \mathbb{P}^n$ et V n'a pas de composante qui contient ou est inclue dans H_∞, alors $V_* \subsetneqq \mathbb{A}^n$ et $(V_*)^* = V$.
(i) Si V est irréductible dans $\mathbb{P}^n$ et $H_\infty \subseteq V$, alors $V = \mathbb{P}^n$ ou $V = H_\infty$. Si $V = \mathbb{P}^n$, alors $V_* = \mathbb{A}^n$. Si $V = H_\infty$, alors $V_* = \emptyset$.

5. Soit F un polynôme irréductible dans $k[X_1, \ldots, X_n]$. Soit $V = Z(F)$ et $I = I(V) = (F)$. Montrer que $I^* = (F^*)$.

6. Soit $V = Z(Y - X^2, Z - X^3) \subset \mathbb{A}^3$. Montrer que :
(a) $I(V) = (Y - X^2, Z - X^3)$;
(b) $ZW - XY \in I(V)^* \subset k[X, Y, Z, W]$;
(c) $ZW - XY \notin ((Y - X^2)^*, (Z - X^3)^*)$.
En déduire que $I(V) = (F_1, \ldots, F_r) \not\Rightarrow I(V)^* = (F_1^*, \ldots, F_r^*)$.

7. Décrire les sous-variétés de $\mathbb{P}^1$.