Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2013/2014**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 4

1. Soit $V = Z(Y^2 - X^2(X+1))$. Montrer que le morphisme $\varphi : \mathbb{A}^1 \to V$, $t \mapsto (t^2-1, t(t^2-1))$ est injectif et surjectif, sauf aux points ± 1.

2. Soit F un polynôme dans $k[X,Y]$. Posons $D(F) := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \,|\, F(x,y) \neq 0\}$. Montrer que $D(F)$ est un ouvert de $\mathbb{A}^2$ et isomorphe à un fermé de $\mathbb{A}^3$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ et soit $C := \mathrm{Im}\varphi$. Montrer que $k[C]$ est isomorphe à $k[X]$ de 2 façons.

4. Dans les cas suivants construire un isomorphisme $\varphi : V \to W$ d'ensembles algébriques affines. Calculer sa réciproque et φ^*.

(a) $V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\} \subset \mathbb{A}^n$ et $W = \{(b_1, b_2, \dots, b_m)\} \subset \mathbb{A}^m$;

(b) $V = Z(X - Y) \subset \mathbb{A}^2$ et $W = Z(X+Y) \subset \mathbb{A}^2$;

(c) $V = \mathbb{A}^1$ et $W = Z(X^r - Y) \subset \mathbb{A}^2$ où $r \in \mathbb{N}^*$;

(d) $V = Z(Y^2 - X) \subset \mathbb{A}^2$ et $W = Z(X^2 - Y) \subset \mathbb{A}^2$;

(e) $V = \mathbb{A}^1$ et $W = Z(X^2 - Y, X^2 - Z) \subset \mathbb{A}^3$;

(f) $V = \mathbb{A}^2$ et $W = Z(Z - XY) \subset \mathbb{A}^3$;

(g) $V = Z(Y^2 - Z) \subset \mathbb{A}^2$ et $W = Z(X^2 - Y) \subset \mathbb{A}^3$.

5. Soient V, W des variétés algébriques affines. Si V et W sont isomorphes, alors $\dim(V) = \dim(W)$. En déduire que $Z(X-Y) \subset \mathbb{A}^2$ et $Z(X-Y) \subset \mathbb{A}^3$ ne sont pas des variétés algébriques affines isomorphes.

6. Soit R un anneau. On appelle S un ensemble multiplicatif de R si $s_1 s_2 \in S$ pour tous $s_1, s_2 \in S$. On suppose que $0 \notin S$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $R \times S$ par $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ s'il existe $t \in S$ tel que $t(r_1 s_2 - r_2 s_1) = 0$. On note par la fraction r/s la classe d'équivalence de (r,s). On appelle l'anneau $S^{-1}R := \{r/s \,|\, r \in R, s \in S\}$ *le localisé de R à S*. Les idéaux de $S^{-1}R$ sont de la forme $S^{-1}I$, où I est un idéal de R tel que $I \cap S = \emptyset$.

(a) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R. Montrer que $S := R - \mathfrak{p}$ est un ensemble multiplicatif de R. Soit $R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R$. Décrire les idéaux de $R_{\mathfrak{p}}$. Montrer que $R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local.

(b) Décrire $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}$ et ses idéaux.

(c) Montrer que $k[X,Y]_{(Y)} \cong k(X)[Y]$.