Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2013/2014**
M2 Algèbre Appliquée **Semestre 1. Période 1**

Courbes algébriques - TD 5

1. En utilisant ce que vous connaissez sur les variétés affines, montrer que les parties algébriques de $\mathbb{P}^2$ suivantes sont irréductibles et calculer leur dimension:

$$\mathbb{P}^2,\ \ Z(X-Y),\ \ Z(X^2-YZ),\ \ H_\infty,\ \ \text{un point dans } \mathbb{P}^2.$$

2. Soit $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^4$, $(x, y) \mapsto (x^2, x^2y, xy^2, y^2)$. Montrer que φ est un morphisme birationnel entre $\mathbb{A}^2$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$, mais pas un isomorphisme.

3. Déterminer $\mathcal{O}(U)$ pour $U = D(X^2 - Y^2) \subset \mathbb{P}^1$.

4. Montrer que l'application $\varphi : Z(Y^2Z - X^3) \to \mathbb{P}^1$, $(x : y : z) \mapsto (x^2 : y^2)$ est une application régulière (un morphisme de variétés projectives).

5. Soit $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$, $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ et $\bar{\varphi} := \varphi|_{D(X-Y)}$.

(a) Montrer que $\bar{\varphi}$ est une application régulière.

(b) Trouver l'image de $\bar{\varphi}$.

(c) Montrer que φ n'est pas une application régulière.

(d) Montrer que φ est une application rationnelle.

(e) Est-ce que φ est dominante ?

6. Trouver les points réguliers et les points singuliers des variétés algébriques projectives suivantes.

(a) $V = Z(X^2 + Y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$;

(b) $V = Z(X^3 - Y^2) \subset \mathbb{A}^2$;

(c) $V = Z(Y^2) \subset \mathbb{A}^2$;

(d) $V = Z(X - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - Y) \subset \mathbb{A}^3$;

(e) $V = \{(t, t^2, t^3) \,|\, t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$.

7. Trouver les points réguliers et les points singuliers des variétés algébriques affines suivantes.

(a) $V = Z(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{P}^2$;

(b) $V = Z(X^3 - Y^2Z) \subset \mathbb{P}^2$.

8. Etudier la lissité de $Z(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2$ suivant $\lambda \in k$.

9. Soient $V = Z(X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3) \subset \mathbb{A}_k$ et $P = (0, 0, 0) \in V$. Calculer $\dim_k(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)$.