

Συμβολισμοί

$\mathbb{N}$: φυσικοί αριθμοί.

$\mathbb{Z}$: ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q}$: ρητοί αριθμοί

$\mathbb{R}$: πραγματικοί αριθμοί

$\mathbb{C}$: μιγαδικοί αριθμοί

Προτασιακός Λογισμός

Πρόταση (δηλωτική) :

Ένας ισχυρισμός που έχει νόημα, είναι από μόνος του αληθής ή ψευδής, δηλαδή όχι και τα δύο.

Παραδείγματα δηλωτικών προτάσεων

- Η Χρυσερόικη είναι μαθηματικός.
- Όλοι οι μαθητές στην τάξη είναι ξανθοί.
- Υπάρχει μαθηματικός που δεν του αρέσει ο καφές.
- Αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει.
- Αν φας όλο το φαγητό σου, θα δεις τηλεόραση.
- Το 3 είναι πρώτος αριθμός.
- Το 3 είναι μεγαλύτερο του 5.
- Το 3 διαιρεί το 6 και το 15
- Το 3 διαιρεί το 6 και το 8.
- Το 3 διαιρεί το 6 ή το 8.
- Αν το x είναι μεγαλύτερο του 5, τότε το $x+1$ είναι μεγαλύτερο του 6.
- Αν το x είναι μεγαλύτερο του 5, τότε το $x+1$ είναι μεγαλύτερο του 8.
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί
- Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων.
(εμπόρεμα του Goldbach).

Παραδείγματα μη δηλωτικών προτάσεων

- Άνοιξε την πόρτα.
- Γιατί το 6 δεν είναι πρώτος;
- Η Σακίρα είναι όμορφη.
- Αυτή η πρόταση είναι ψευδής.

Μια δηλωτική πρόταση τη συμβολίζουμε με κάποιο γράμμα του λατινικού αλφαβήτου:

P : "Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός"

R : "Αν ο ακέραιος x είναι πολλαπλάσιο του 6, τότε ο x είναι άρτιος".
↑ εμφάνιση μεταβλητής

P : "Αν a, b είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και c το μήκος της υποτείνουσας, τότε $a^2 + b^2 = c^2$ "
(Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Q : "Αν a, b, c, n είναι ακέραιοι με $n > 2$, τότε $a^n + b^n \neq c^n$ "
(Τελευταίο Θεώρημα του Fermat)

Άρνηση προτάσεων

Όρισμός Η άρνηση μιας πρότασης p είναι μια πρόταση $\neg p$, η οποία είναι ψευδής, όταν η p είναι αληθής.

Παράδειγμα:

p : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

$\neg p$: Δεν ισχύει η p

Δεν είναι αληθές ότι ο αριθμός 2 είναι άρτιος.

Ο αριθμός 2 δεν είναι άρτιος

Ο αριθμός 2 είναι περιττός !!!

Παρατήρηση: $\neg(\neg p) \equiv p$ (αληθής, όταν η p είναι αληθής)

Παραδείγματα:

p : Όλοι οι μαθητές στην τάξη είναι ξανθοί.

$\neg p$: Δεν ισχύει ότι όλοι οι μαθητές στην τάξη είναι ξανθοί.

Υπάρχει μαθητής στην τάξη που δεν είναι ξανθός

q : Υπάρχει μαθηματικός που δεν του αρέσει ο καφές

$\neg q$: Δεν υπάρχει μαθηματικός που δεν του αρέσει ο καφές.

Σε όλους τους μαθηματικούς αρέσει ο καφές.

r : Ο τοίχος είναι μαύρος

$\neg r$: Ο τοίχος δεν είναι μαύρος

Ο τοίχος έχει ένα χρώμα διαφορετικό από το μαύρο

s : Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

$\neg s$: Δεν ισχύει ότι η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$

Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

t : Η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζη στο $\mathbb{N}$.

$\neg t$: Δεν ισχύει ότι η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζη στο $\mathbb{N}$
Η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ δεν έχει ρίζη στο $\mathbb{N}$ ή έχει περισσότερες
από μια ρίζη στο $\mathbb{N}$

Σύζευξη και διάζευξη προτάσεων

Σύζευξη: p και q Συμβ. $p \wedge q$

Παραδείγματα:

- p : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

- q : Ο αριθμός 4 είναι άρτιος

$p \wedge q$: Οι αριθμοί 2 και 4 είναι άρτιοι.

$\neg(p \wedge q)$: Δεν είναι αληθές ότι οι αριθμοί 2 και 4 είναι άρτιοι

Τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς 2 και 4 δεν είναι άρτιος.

Ο αριθμός 2 δεν είναι άρτιος ή ο αριθμός 4 δεν είναι άρτιος.

- P : Η Μαρία είναι ξανθιά.

- Q : Η Μαρία έχει μπλε μάτια.

$P \wedge Q$: Η Μαρία είναι ξανθιά με μπλε μάτια

$\neg(P \wedge Q)$: Δεν είναι αληθές ότι η Μαρία είναι ξανθιά με μπλε μάτια.

Μπορεί να μην είναι ξανθιά, μπορεί να μην έχει μπλε μάτια

Η Μαρία δεν είναι ξανθιά ή δεν έχει μπλε μάτια.

Διάζευξη: $p \vee q$ Συμβ. $p \vee q$
(περιεκτική)

Παραδείγματα:

- p : Ο αριθμός 2 είναι άρτιος

- q : Ο αριθμός 3 είναι άρτιος

- $p \vee q$: Ο αριθμός 2 είναι άρτιος ή ο αριθμός 3 είναι άρτιος

- $\neg(p \vee q)$: Δεν είναι αληθές ότι ο 2 ή ο 3 είναι άρτιοι

Οι αριθμοί 2 και 3 δεν είναι άρτιοι

- P : Αύριο θα βρέξει

- Q : Αύριο θα χιονίσει

- $P \vee Q$: Αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει

- $\neg(P \vee Q)$: Δεν είναι αληθές ότι αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει.

Αύριο ούτε θα βρέξει ούτε θα χιονίσει.

Αύριο δε θα βρέξει και δε θα χιονίσει

Παρατήρηση : Στα μαθηματικά ο όρος «ή» επιτρέπει να ισχύουν και οι δύο προτάσεις ταυτόχρονα. Όταν μιλάμε, συχνά τον χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε αποκλειστική διάζευξη (π.χ. να παραγγείλουμε πίτσα ή σουβλάκια;). Στα μαθηματικά, αυτό δηλώνεται με «ή...ή...», «είτε...είτε...», «...ή..., αλλά όχι και τα δύο» Συμβολίζεται ως $p \underline{\vee} q$.

Παραδείγματα:

• p : ο ακέραιος x είναι άρτιος

q : ο ακέραιος x είναι περιττός

$p \vee q$: ο ακέραιος x ή είναι άρτιος ή είναι περιττός.

ο ακέραιος x είναι άρτιος ή περιττός, αλλιώς όχι και τα δύο

$\neg(p \vee q)$: ο ακέραιος x ή δεν είναι ούτε άρτιος ούτε περιττός

ή ο ακέραιος x είναι άρτιος και περιττός.

• P : Αύριο θα βρέξει

Q : Αύριο θα χιονίσει

$P \vee Q$: Αύριο ή θα βρέξει ή θα χιονίσει.

$\neg(P \vee Q)$: Αύριο ούτε θα βρέξει, ούτε θα χιονίσει ή θα γίνουν και τα δύο.

Πίνακες Αληθείας

p	$\neg p$
A	ψ
ψ	A

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
A	A	A	A	ψ
A	ψ	ψ	A	A
ψ	A	ψ	A	A
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ

Άσκηση 1 : $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
A	A	A	ψ	ψ	ψ	ψ
A	ψ	ψ	A	ψ	A	A
ψ	A	ψ	A	A	ψ	A
ψ	ψ	ψ	A	A	A	A

Άσκηση 2 : $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Συνεπαγωγική πρόταση

Αν p , τότε q . Συμβ. $p \Rightarrow q$

↑ ↑
υπόθεση συμπέρασμα
παραδοχή

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η πρόταση p (η p είναι αληθής),
τότε (αναγκαστικά) ισχύει η q (η q είναι αληθής)

Παραδείγματα:

- p : Ο αριθμός x είναι πητός.
- q : Ο αριθμός $\sqrt{x}$ είναι πητός.

$p \Rightarrow q$: Αν ο θετικός αριθμός x είναι ρητός, τότε ο $\sqrt{x}$ είναι ρητός.

$\neg(p \Rightarrow q)$: Δεν ισχύει ότι αν ο x είναι ρητός, τότε ο $\sqrt{x}$ είναι ρητός

Ο αριθμός x είναι ρητός, αλλά ο $\sqrt{x}$ είναι άρρητος.

• P : Πηγαίνω στη γαϊκή στις 9:00.

Q : Βρίσκω φρέσκο ψάρι.

$P \Rightarrow Q$: Αν πάω στη γαϊκή στις 9:00, βρίσκω φρέσκο ψάρι.

$\neg(P \Rightarrow Q)$: Πάω στη γαϊκή στις 9:00, αλλά δε βρίσκω φρέσκο ψάρι.

P	q	$P \Rightarrow q$
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Παρατήρηση:

Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

- Αν η διαχίμαιά μου είχε καρούλια, θα ήταν τρώγλει.
- Αν ο αριθμός 4 είναι περιττός, τότε ισχύει η ειυασία του Goldbach.
- Αν υπάρχει πέπερασμένο πηήδας πρώτων αριθμών, τότε ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός.

- ! Το σύμβολο $\Rightarrow$ δεν υποδηλώνει ύπαρξη απόδειξης
συν προτασιακό λογισμό.

Ισοδύναμες Ευφράσεις για $p \Rightarrow q$:

- q , αν p .
- Η p είναι ικανή συνθήκη για την q .
- Για να ισχύει το q , αρκεί να ισχύει το p .
- Η q είναι αναγκαία συνθήκη για την p .
- Η p ισχύει μόνο αν ισχύει η q .
- Δε γίνεται να ισχύει η p και να μην ισχύει η q .

Παραδείγματα στην πραγματική ζωή

- Αν βρέξει, δε θα έρθω στη συνάντηση.
- Αν δεν ψηφίσεις το κόμμα αυτό, οι συντάξεις θα μειωθούν.
- Αν μπορείς να λύσεις το πρόβλημα αυτό, είσαι ιδιοφυΐα.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
A	A	A	ψ	ψ	ψ
A	ψ	ψ	A	A	A
ψ	A	A	ψ	ψ	ψ
ψ	ψ	A	A	ψ	ψ

Συμπέρασμα : $\neg (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Μορφές συνεπαγωγής

			αντίστροφη	αντιθέτη	αντιθετοαντίστροφη
p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
A	A	A	A	A	A
A	ψ	ψ	A	A	ψ
ψ	A	A	ψ	ψ	A
ψ	ψ	A	A	A	A

Συμπέρασμα: $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Παράδειγμα:

$p \Rightarrow q$: Αν $x=3$, τότε $x^2=9$ A

$q \Rightarrow p$: Αν $x^2=9$, τότε $x=3$ ψ

$\neg p \Rightarrow \neg q$: Αν $x \neq 3$, τότε $x^2 \neq 9$. ψ

$\neg q \Rightarrow \neg p$: Αν $x^2 \neq 9$, τότε $x \neq 3$. A