Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας

Ορισμοί, θεωρήματα και αποδείξεις

Πώς διαβάζουμε την πρώτη πρόταση

$$\forall x \in \mathbb{Z} \;\; \exists y \in \mathbb{Z} : \;\; y > x$$

Μπορούμε να πούμε:

- Για κάθε ακέραιο x υπάρχει ακέραιος y έτσι ώστε $y > x$.
- Για κάθε ακέραιο x υπάρχουν ακέραιοι y έτσι ώστε $y > x$.
- Για κάθε ακέραιο x υπάρχει τουλάχιστον ένας ακέραιος y έτσι ώστε $y > x$.

Αλλά όχι:

- Για κάθε ακέραιο x υπάρχει το πολύ ένας ακέραιος y έτσι ώστε $y > x$.
- Για κάθε ακέραιο x υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος y έτσι ώστε $y > x$.

Μοναδικότητα

Παρατήρηση 1. Το «υπάρχει ακριβώς ένα» ή «υπάρχει μοναδικό» συμβολίζεται με $\exists!$.

Παρατήρηση 2. Όταν μιλάμε, η φράση «κάθε φοιτητής έχει ένα μοναδικό αριθμό μητρώου» υπονοεί κάτι διαφορετικό από τη μαθηματική φράση «κάθε εξίσωση της μορφής $ax + b = 0$ με $a, b \in \mathbb{R}$ έχει μια μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$».

Εμάς μας ενδιαφέρει η μαθηματική σημασία:

- Η εξίσωση $3x - 1 = 0$ έχει τη μοναδική λύση $x = 1/3$.
- Η εξίσωση $x - \frac{1}{3} = 0$ έχει τη μοναδική λύση $x = 1/3$.

Άρνηση ποσοδεικτών

$$\neg(\forall x \in S : \ p(x)) \ \equiv \ \exists x \in S : \ \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in S : \ p(x)) \ \equiv \ \forall x \in S : \ \neg p(x)$$

(όπου S είναι ένα σύνολο.)

Παράδειγμα.

$$R : \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists y \in \mathbb{R} : \ y^3 = x$$
$$\neg R : \ \exists x \in \mathbb{R} \ \ \forall y \in \mathbb{R} : \ \neg(y^3 = x)$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \ \ \forall y \in \mathbb{R} : \ y^3 \neq x$$

Επιπλέον παραδείγματα: ασκήσεις άρνησης

- $a_n \to L$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N :\ |a_n - L| < \varepsilon$.
  Άρνηση: $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geq N :\ |a_n - L| \geq \varepsilon$.

- f φραγμένη: $\exists M\ \forall x :\ |f(x)| \leq M$.
  Άρνηση: $\forall M\ \exists x :\ |f(x)| > M$.

- f ένα προς ένα: $\forall x, y :\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
  Άρνηση: $\exists x, y :\ f(x) = f(y) \wedge x \neq y$.

- $\exists! x :\ p(x)$ σημαίνει $\exists x \left(p(x) \wedge \forall y \left(p(y) \Rightarrow y = x\right)\right)$.
  Άρνηση: δεν υπάρχει κανένα x με $p(x)$, ή υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά x, y με $p(x)$ και $p(y)$.

Επιπλέον παράδειγμα: το κενό σύνολο

Έστω $p(x)$ μια οποιαδήποτε ιδιότητα. Η πρόταση $\forall x \in \varnothing : \ p(x)$ είναι **αληθής**. Η πρόταση $\exists x \in \varnothing : \ p(x)$ είναι **ψευδής**.

Άρα η πρόταση «κάθε στοιχείο του $\varnothing$ είναι πρώτος αριθμός» είναι αληθής. Αλλά και η πρόταση «κάθε στοιχείο του $\varnothing$ δεν είναι πρώτος αριθμός» είναι αληθής. Ο λόγος είναι ο ίδιος με πριν: δεν υπάρχει στοιχείο που να διαψεύσει την πρόταση (συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση).

Επιπλέον παράδειγμα: γνωστές προτάσεις με ποσοδείκτες

- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p > n :$ p πρώτος.
- Εικασία του *Goldbach*: $\forall n \geq 2\ \exists p, q$ πρώτοι : $2n = p + q$.
- Εικασία των δίδυμων πρώτων: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p > n :$ p και $p+2$ πρώτοι.

Οι τρεις προτάσεις έχουν παρόμοια λογική δομή. Η πρώτη αποδείχθηκε από τον Ευκλείδη, ενώ οι άλλες δύο είναι ανοιχτά προβλήματα.

Άσκηση

«Μπορείς να ξεγελάσεις όλο τον κόσμο κάποια στιγμή, και μπορείς να να ξεγελάς κάποιους ανθρώπους συνέχεια, αλλά δεν μπορείς να ξεγελάς όλο τον κόσμο συνέχεια.» (Αβραάμ Λίνκολν)

x: ένας άνθρωπος. t: μια χρονική στιγμή. $p(x,t)$: εξαπάτηση του ανθρώπου x τη στιγμή t.

$$\big(\exists t\ \forall x\ p(x,t)\big) \wedge \big(\exists x\ \forall t\ p(x,t)\big) \wedge \big(\exists (x,t)\ \neg p(x,t)\big)$$

Ορισμοί: άρτιοι και περιττοί

- Ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται άρτιος αν υπάρχει ακέραιος αριθμός m τέτοιος ώστε $n = 2m$.
  Ισοδύναμα: το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το 2 είναι ίσο με 0.
- Ένας ακέραιος αριθμός είναι περιττός αν δεν είναι άρτιος.
  Ισοδύναμα: υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $n = 2m + 1$.
  Ισοδύναμα: υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $n = 2m - 1$.
  Ισοδύναμα: το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του n με το 2 είναι ίσο με 1.

Παρατήρηση. Το «αν» στον ορισμό είναι πάντα «αν και μόνο αν».

Ορισμοί: διωνυμικός συντελεστής

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

όπου $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$, και $m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$, $0! = 1$.

Ισοδύναμα $(\cdot)$: το $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός των τρόπων που μπορώ να διαλέξω k στοιχεία από τα n, όπου $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν υπάρχει ορισμός «περίπου» σωστός.

Παράδειγμα: αλγεβρικοί ακέραιοι

Ένας πραγματικός αριθμός α ονομάζεται αλγεβρικός ακέραιος αν υπάρχει **μονικό** πολυώνυμο $f(x) \neq 0$ με ακέραιους συντελεστές τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0$. (Μονικό: ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι 1.)

Π.χ. το $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός ακέραιος γιατί είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^2 - 2$.

Αν ξεχάσουμε τη συνθήκη $f(x) \neq 0$, τότε όλοι οι πραγματικοί είναι αλγεβρικοί ακέραιοι.

Αν ξεχάσουμε τη συνθήκη «μονικό», τότε όλοι οι ρητοί είναι αλγεβρικοί ακέραιοι (π.χ. το $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $2x - 1$).

Παράδειγμα πιο πολύπλοκου ορισμού

Ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ονομάζεται ανάγωγο αν ικανοποιούνται οι δύο παρακάτω συνθήκες:

(1) $f(x) \notin \mathbb{R}$ ($\iff \deg f(x) \geq 1$)

(2) Αν $f(x) = g(x)h(x)$ με $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, τότε $\deg g(x) = 0$ ή $\deg h(x) = 0$.

Π.χ. το πολυώνυμο $x^2 - 1$ δεν είναι ανάγωγο, το πολυώνυμο $x^2 + 1$ είναι.

Ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $\deg f(x) = 1$ ή $\deg f(x) = 2$ και το $f(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Η παραπάνω φράση δεν είναι ορισμός, αλλά ΘΕΩΡΗΜΑ.

Θεωρήματα

Μια αληθής συνεπαγωγή είναι ένα θεώρημα (ή πρόταση ή λήμμα ή πόρισμα).

Ένα θεώρημα χρειάζεται απόδειξη. Ένα αξίωμα όχι.

Αξιώματα της γεωμετρίας

Έστω E μια ευθεία και Σ ένα σημείο που δεν ανήκει στην ευθεία E.

Αξίωμα Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Από το Σ περνάει μοναδική ευθεία παράλληλη στην E.

Αξίωμα Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Από το Σ δεν περνάει καμία ευθεία παράλληλη στην E.

Αξίωμα Υπερβολικής Γεωμετρίας. Από το Σ περνούν τουλάχιστον δύο ευθείες παράλληλες στην E.

Παραλληλισμοί με το σκάκι

- Ορισμοί $\sim$ Πώς λέγονται τα πιόνια, τι είναι το ματ...
- Αξιώματα $\sim$ Πώς κινούνται τα πιόνια...
- Θεωρήματα $\sim$ Αν η βασίλισσα πάει εκεί, τότε σε 2 κινήσεις θα κάνουν ματ τα λευκά...

Μια συνεπαγωγή είναι **ΑΛΗΘΗΣ** αν έχει **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**.
Μια συνεπαγωγή είναι **ΨΕΥΔΗΣ** αν έχει **ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ** (διάψευση πρότασης).

Παρά πολλά παραδείγματα δεν αποτελούν απόδειξη. Το να μην μπορεί να αποδείξει κάποιος κάτι δεν είναι αντιπαράδειγμα.

Εικασίες

Ένα αποτέλεσμα το οποίο πιστεύουμε ότι είναι αληθές, αλλά δεν έχει αποδειχθεί, ονομάζεται εικασία ή υπόθεση.

Παραδείγματα.

- Η εικασία του *Goldbach* (1742), που λέει ότι κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων, έχει τσεκαριστεί μέχρι το 400.000.000.000.000.
- Το τελευταίο θεώρημα του Φερματ (1637) λεγόταν εσφαλμένα θεώρημα μέχρι το 1995.

Παράδειγμα: εικόνα και αντίστροφη εικόνα

Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση. Αν $X \subseteq A$, τότε $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$. Αν $Y \subseteq B$, τότε $f^{-1}(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

Ισχύει $f(f^{-1}(Y)) = Y$;

Έστω $a \in f^{-1}(Y)$. Τότε $f(a) \in Y$. Άρα $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. $(*)$

Έστω $y \in Y$. Δεν ξέρω αν υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = y$. ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΣΤΑΜΑΤΗΣΟΥΜΕ ΕΚΕΙ.

Αντιπαράδειγμα και πρόσθετη υπόθεση

Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$ και $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = \{0\} \neq \mathbb{R}$.

Αν υπήρχε επιπλέον η υπόθεση ότι η f είναι επί, τότε για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = y$. Εξ ορισμού $a \in f^{-1}(Y)$, οπότε $y \in f(f^{-1}(Y))$. Καταλήγουμε ότι $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$. $(**)$
$(*), (**) \Rightarrow Y = f(f^{-1}(Y))$.

Παρατήρηση. Για να δείξουμε ότι 2 σύνολα A και B είναι ίσα, είναι σύνηθες να αποδεικνύουμε ότι $A \subseteq B$ (αν $x \in A$, τότε $x \in B$) και $B \subseteq A$ (αν $x \in B$, τότε $x \in A$).

Η ευθεία απόδειξη

Το τελευταίο παράδειγμα πιο πάνω είναι παράδειγμα ευθείας απόδειξης. Ας κάνουμε ένα ακόμα πιο απλό παράδειγμα.

Θεώρημα 1. Αν ο ακέραιος n είναι περιττός, τότε ο n^2 είναι περιττός.

Απόδειξη. Υπάρχει ακέραιος m τέτοιος ώστε $n = 2m + 1$. Έχουμε

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1.$$

Άρα ο n^2 είναι περιττός. ■

Απόδειξη εξαντλώντας όλες τις περιπτώσεις

Θεώρημα 2. Το τετράγωνο ενός ακεραίου είναι της μορφής $4k$ ή $4k+1$ για $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Αν n είναι άρτιος, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $n = 2m$. Έχουμε $n^2 = 4m^2$. Αν n είναι περιττός, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $n = 2m+1$. Έχουμε $n^2 = 4(m^2+m)+1$. ■

Απόδειξη της αντιθετοαντίστροφης

Έχουμε δει ότι $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Στο Θεώρημα 1 αυτό σημαίνει να δείξουμε το εξής: Αν n^2 άρτιος, τότε n άρτιος.

Έστω m τέτοιος ώστε $n^2 = 2m$. Δεν είναι πολύ απλό να συνεχίσουμε χωρίς στο τέλος να κάνουμε μια ευθεία απόδειξη ή να εξαντλήσουμε όλες τις περιπτώσεις.

Θεώρημα 3. Αν $x^3 + x^2 + x + 1 > 0$, τότε $x \neq -1$.

Απόδειξη. Αν $x = -1$, τότε
$x^3 + x^2 + x + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$ ■

Η εις άτοπον απαγωγή

Η εις άτοπον απαγωγή μοιάζει με την προηγούμενη τεχνική. Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει και καταλήγουμε σε κάτι που είναι πασιφανώς ψευδές (π.χ. $0 = 1$). Αυτό λέγεται άτοπο. Άρα η υπόθεσή μας είναι ψευδής, δηλ. το συμπέρασμα είναι αληθές.

Θεώρημα 4. Υπάρχουν άπειροι ρητοί μεταξύ του 0 και του 1.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ρητών μεταξύ του 0 και του 1. Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ όλοι οι ρητοί μεταξύ του 0 και του 1 διατεταγμένοι ώστε $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$. Έχουμε $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \{a_1, \ldots, a_r\}$, και άρα $r \geq 2$. Τότε $a_1 < \dfrac{a_1 + a_2}{2} < a_2$ και $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \in \mathbb{Q}$, οπότε βρήκαμε ένα ρητό που δε συμπεριλαμβάνεται στους $\{a_1, \ldots, a_r\}$ αλλά βρίσκεται μεταξύ του 0 και του 1: ΑΤΟΠΟ.

Θεώρημα 4: μια άλλη προσέγγιση

Έχουμε $0 < \frac{1}{n} < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Άρα $\frac{1}{n} \in \{a_1, \ldots, a_r\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι πεπερασμένο: ΑΤΟΠΟ. ■

Θεώρημα 5: ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Θεώρημα 5. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (αν $x = 2$, τότε $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$).

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ και μκδ$(m, n) = 1$. Έχουμε $(\sqrt{2})^2 = \frac{m^2}{n^2}$, οπότε $m^2 = 2n^2$ άρτιος. Από το Θεώρημα 1 (πιο συγκεκριμένα την αντιθετοαντίστροφη του Θεωρήματος 1) έχουμε ότι ο m πρέπει να είναι άρτιος. Άρα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $m = 2k$. Τώρα έχουμε $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2$, και άρα $n^2 = 2k^2$. Επίσης από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι ο n πρέπει να είναι άρτιος: ΑΤΟΠΟ.

Άρα ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. ■

Αντιθετοαντίστροφη ή εις άτοπον απαγωγή;

Θέλουμε να δείξουμε: αν ο n^2 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Με αντιθετοαντίστροφη: αν ο n είναι περιττός, τότε ο n^2 είναι περιττός, δηλαδή το Θεώρημα 1.

Με εις άτοπον απαγωγή: έστω ότι ο n^2 είναι άρτιος και ο n είναι περιττός. Από το Θεώρημα 1 ο n^2 είναι περιττός, άτοπο.

Εδώ η απαγωγή είναι ουσιαστικά η αντιθετοαντίστροφη «μεταμφιεσμένη».

Άπειροι πρώτοι (Ευκλείδης)

Θεώρημα. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένοι πρώτοι $p_1, \ldots, p_r$.
Θεωρούμε τον $N = p_1 p_2 \cdots p_r + 1 > 1$. Ο N έχει έναν πρώτο διαιρέτη q.
Αν $q = p_i$ για κάποιο i, τότε $p_i \mid N$ και $p_i \mid N - 1$, άρα $p_i \mid 1$: άτοπο.
Άρα ο q είναι ένας πρώτος που δεν ανήκει στη λίστα: άτοπο. ■

Αποδείξεις ύπαρξης: μια μη κατασκευαστική απόδειξη

Πολλά θεωρήματα έχουν τη μορφή «υπάρχει x τέτοιο ώστε ...». Θα δούμε δύο διαφορετικούς τρόπους να αποδείξουμε μια τέτοια πρόταση.

Πρόταση. Υπάρχουν άρρητοι a, b τέτοιοι ώστε το a^b να είναι ρητός.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5, ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Θεωρούμε τον αριθμό $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ο αριθμός αυτός είναι ρητός ή άρρητος.

Μια μη κατασκευαστική απόδειξη (συνέχεια)

Περίπτωση 1: ο $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός. Τότε παίρνουμε $a = b = \sqrt{2}$.

Περίπτωση 2: ο $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος. Τότε παίρνουμε $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ και $b = \sqrt{2}$, οπότε

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Σε κάθε περίπτωση βρήκαμε τέτοιο ζεύγος. ■

Η απόδειξη χρησιμοποιεί ότι η πρόταση «ρητός ή άρρητος» είναι ταυτολογία, δηλαδή της μορφής $P \vee \neg P$. Όμως δεν μας λέει ποια από τις δύο περιπτώσεις ισχύει. Άρα δεν μας δίνει κανένα συγκεκριμένο ζεύγος a, b.

Μια κατασκευαστική απόδειξη

Ας αποδείξουμε την ίδια πρόταση δίνοντας ένα συγκεκριμένο ζεύγος.

Θέτουμε $a = \sqrt{2}$ και $b = 2\log_2 3$, όπου $\log_2 3$ είναι ο πραγματικός αριθμός x με $2^x = 3$. Τότε

$$a^b = \left(2^{1/2}\right)^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Άρα το $a^b = 3$ είναι ρητός. Ο $a = \sqrt{2}$ είναι άρρητος από το Θεώρημα 5. Μένει να δείξουμε ότι ο $b = 2\log_2 3$ είναι άρρητος.

Ο $b = 2\log_2 3$ είναι άρρητος

Έστω ότι ο b είναι ρητός. Αφού $b > 0$, υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}^*$ με $b = \frac{p}{q}$.

Τότε $\log_2 3 = \frac{p}{2q}$, δηλαδή $3 = 2^{p/(2q)}$. Υψώνοντας στη δύναμη $2q$ παίρνουμε

$$3^{2q} = 2^p.$$

Ο αριθμός 3^{2q} είναι περιττός, ως γινόμενο περιττών. Ο αριθμός 2^p είναι άρτιος, αφού $p \geq 1$. Αυτό είναι άτοπο. Άρα ο b είναι άρρητος. ■

Κατασκευαστική ή μη κατασκευαστική;

Και οι δύο αποδείξεις αποδεικνύουν την ίδια πρόταση.

Η πρώτη δείχνει ότι ένα από τα ζεύγη $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ είναι κατάλληλο, αλλά δεν λέει ποιο. Η δεύτερη δίνει ρητά ένα ζεύγος: το $(\sqrt{2}, 2\log_2 3)$.

Τι σημαίνει λοιπόν «υπάρχει» σε ένα θεώρημα· Μια *κατασκευαστική* απόδειξη ύπαρξης παρουσιάζει το αντικείμενο. Μια *μη κατασκευαστική* απόδειξη δείχνει μόνο ότι η ανυπαρξία οδηγεί σε αντίφαση ή ότι ένα από πολλά υποψήφια αντικείμενα κάνει τη δουλειά.

Σημείωση. Με πολύ βαθύτερα εργαλεία (Θεώρημα *Gelfond – Schneider*) αποδεικνύεται ότι ο $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος, άρα ισχύει η Περίπτωση 2.

Ποια από τις παρακάτω φράσεις έχει το ίδιο ακριβώς νόημα με τη φράση "ό,τι λάμπει δεν είναι χρυσός";

Quiz question · 30 answers · 30 participants

Κάθε πράγμα που λάμπει δεν είναι χρυσός. - 11 answers

37%

Αν κάτι λάμπει, δεν είναι χρυσός. - 2 answers

7%

Υπάρχει κάτι που λάμπει και δεν είναι χρυσός. - 17 answers

57%

Αν κάτι δεν είναι χρυσός, λάμπει. - 0 answers

0%

slido

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 αν και μόνο αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε x στο διάστημα (-δ,δ) ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. Άρα μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής αν και μόνο αν:

Quiz question · 26 answers · 26 participants

για κάθε ε>0 δεν υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε x στο διάστημα (-δ,δ) ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. - 3 answers

12%

υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε για κάθε δ>0 και για κάθε x στο διάστημα (-δ,δ) δεν ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. - 10 answers

38%

υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε για κάθε δ>0 δεν υπάρχει x στο διάστημα (-δ,δ) για το οποίο ισχύει |f(x)-f(0)|<ε. - 7 answers

27%

υπάρχει ε>0 τέτοιο ώστε για κάθε δ>0 υπάρχει x στο διάστημα (-δ,δ) για το οποίο ισχύει |f(x)-f(0)|≥ε. - 6 answers

23%

slido

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=x^2 για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x". Με x^2 συμβολίζουμε το x·x.

Quiz question · 30 answers · 30 participants

Αληθής. - 16 answers

53%

Ψευδής. - 6 answers

20%

Εξαρτάται. - 2 answers

7%

Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. - 6 answers

20%

slido

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=x^2". Με x^2 συμβολίζουμε το x·x.

Quiz question · 31 answers · 31 participants

Αληθής. - 26 answers

84%

Ψευδής. - 2 answers

6%

Εξαρτάται. - 1 answer

3%

Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. - 2 answers

6%

slido

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=2x για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x".

Quiz question · 31 answers · 31 participants

Αληθής. - 26 answers

84%

Ψευδής. - 5 answers

16%

Εξαρτάται. - 0 answers

0%

Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. - 0 answers

0%

slido

Αποφανθείτε αν η παρακάτω φράση είναι αληθής ή ψευδής: "Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x, υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε xy=2x".

Quiz question · 31 answers · 31 participants

Αληθής. - 24 answers

77%

Ψευδής. - 6 answers

19%

Εξαρτάται. - 0 answers

0%

Δεν έχουμε αρκετά δεδομένα για να κρίνουμε. - 1 answer

3%

slido

Είναι η πρόταση "P∨(Q∧R)" ισοδύναμη με την πρόταση "(P∨Q)∧R";

Quiz question · 31 answers · 31 participants

Ναι. - 9 answers

29%

Όχι. - 22 answers ✓

71%

Εξαρτάται. - 0 answers

0%

slido

Η πρόταση "$(P \wedge Q) \Rightarrow P$" είναι:

Quiz question · 29 answers · 29 participants

ταυτολογία. - 14 answers ✓

αντίφαση. - 10 answers

κανένα από τα παραπάνω. - 5 answers

slido

Η πρόταση "(P∨Q)⟹P" είναι:

Quiz question · 32 answers · 32 participants

ταυτολογία. - 2 answers

6%

αντίφαση. - 18 answers

56%

κανένα από τα παραπάνω. - 12 answers

38%

slido

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμη με την πρόταση "Αν βρέχει, τότε το έδαφος είναι βρεγμένο";

Quiz question · 31 answers · 31 participants

Αν το έδαφος είναι βρεγμένο, τότε βρέχει. - 2 answers

6%

Αν δεν βρέχει, τότε το έδαφος δεν είναι βρεγμένο. - 5 answers

16%

Αν το έδαφος δεν είναι βρεγμένο, τότε δεν βρέχει. - 22 answers

71%

Αν δεν βρέχει, τότε το έδαφος είναι βρεγμένο. - 2 answers

6%

slido