Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας

Απόδειξη ισοδυναμιών και μαθηματική επαγωγή

Βρείτε το λάθος

«Απόδειξη» ότι $1 = 2$. Έστω $a = b$.

$$\begin{aligned} a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a-b)(a+b) &= b(a-b) \\ a + b &= b \\ 2b = b \quad &\Rightarrow \quad 2 = 1. \end{aligned}$$

Το λάθος: διαιρέσαμε με το $a - b$, που είναι 0.

Πώς αποδεικνύουμε μια ισοδυναμία

Για να αποδείξουμε ότι $P_1 \Leftrightarrow P_2$, αποδεικνύουμε ότι $P_1 \Rightarrow P_2$ και $P_2 \Rightarrow P_1$.

Για να αποδείξουμε ότι $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3 \Leftrightarrow P_4$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$P_1 \Rightarrow P_2, \qquad P_2 \Rightarrow P_3, \qquad P_3 \Rightarrow P_4, \qquad P_4 \Rightarrow P_1.$$

Με τον κύκλο αυτό, κάθε πρόταση συνεπάγεται όλες τις άλλες. Για τρεις προτάσεις αρκεί ο κύκλος $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, $P_3 \Rightarrow P_1$.

Θεώρημα 6

Θεώρημα 6. Έστω A, B δύο σύνολα. Οι παρακάτω τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(ι) $A \subseteq B$,

(ιι) $A \cap B = A$,

(ιιι) $A \cup B = B$.

Θα αποδείξουμε τον κύκλο (ι)$\Rightarrow$(ιι)$\Rightarrow$(ιιι)$\Rightarrow$(ι).

Απόδειξη: (ι) $\Rightarrow$ (ιι)

Θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cap B = A$. Έχουμε πάντα $A \cap B \subseteq A$. Αν τώρα $a \in A$, τότε $a \in B$, αφού $A \subseteq B$. Άρα $a \in A \cap B$. Καταλήγουμε ότι $A \subseteq A \cap B$. Άρα $A \cap B = A$. ■

Απόδειξη: (ιι) $\Rightarrow$ (ιιι)

Υποθέτουμε ότι $A \cap B = A$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $A \cup B = B$. Έχουμε πάντα $B \subseteq A \cup B$. Αν τώρα $x \in A \cup B$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Αν $x \in B$, δεν χρειάζεται να δείξουμε κάτι.
- Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cap B$, αφού $A = A \cap B$. Άρα $x \in B$.

Και στις δύο περιπτώσεις $x \in B$, οπότε $A \cup B \subseteq B$. Άρα $A \cup B = B$. ■

Απόδειξη: (iii) $\Rightarrow$ (i)

Υποθέτουμε ότι $A \cup B = B$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $A \subseteq B$. Αν $a \in A$, τότε $a \in A \cup B$. Αφού $A \cup B = B$, έχουμε $a \in B$. Οπότε $A \subseteq B$. ■

Ολοκληρώσαμε τον κύκλο των συνεπαγωγών. Άρα οι τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες.

Η ιδέα της μαθηματικής επαγωγής

Θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση $P(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δεν μπορούμε να το κάνουμε «εξαντλώντας όλες τις περιπτώσεις», γιατί είναι άπειρες.

Η λογική είναι η εξής. Αποδεικνύουμε ότι ισχύει η πρόταση $P(0)$ (είναι ΑΛΗΘΗΣ). Αποδεικνύουμε επίσης ότι ισχύει η συνεπαγωγή $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Γιατί δουλεύει;

Από την $P(0)$ και τη συνεπαγωγή $P(0) \Rightarrow P(1)$ προκύπτει ότι η $P(1)$ είναι αληθής. Από την $P(1)$ και τη συνεπαγωγή $P(1) \Rightarrow P(2)$ προκύπτει ότι η $P(2)$ είναι αληθής. Και ούτω καθεξής:

$$\underset{\text{A}}{P(0)} \quad \underset{\text{A}}{P(1)} \quad \underset{\text{A}}{P(2)} \quad \underset{\text{A}}{P(3)} \quad \cdots$$

Η επαγωγή είναι ένας κομψός τρόπος να αποφύγουμε τις «τελίτσες» και το «και ούτω καθεξής».

Τι γράφουμε:

Πρώτο βήμα ή βάση της επαγωγής: Απόδειξη ότι η πρόταση $P(0)$ είναι αληθής.

Υπόθεση επαγωγής ή επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ισχύει η $P(n)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. (Ή η $P(k)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, αν προτιμάμε.)

Επαγωγικό βήμα: Απόδειξη ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής. (Αντίστοιχα, η $P(k+1)$.)

Θεώρημα 7

Θεώρημα 7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $n^2 + n$ είναι άρτιος.

Απόδειξη. Έστω $P(n)$: ο $n^2 + n$ είναι άρτιος.

Βήμα 1: Η $P(0)$: ο $0^2 + 0$ είναι άρτιος. Αυτό είναι ΑΛΗΘΕΣ.

Βήμα 2: Έστω ότι ο $n^2 + n$ είναι άρτιος για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι ο $(n+1)^2 + (n+1)$ είναι άρτιος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7 (συνέχεια)

Έχουμε

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2.$$

Από την υπόθεση επαγωγής, ο $n^2 + n$ είναι άρτιος. Επίσης ο $2n + 2 = 2(n+1)$ είναι άρτιος. Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος. Επομένως ο $(n+1)^2 + (n+1)$ είναι άρτιος. ■

Παρατήρηση. Το ότι ο $n(n+1)$ είναι άρτιος δεν χρειάζεται απαραίτητα επαγωγή. Ένας από δύο διαδοχικούς ακεραίους είναι άρτιος.

Επαγωγή με αρχή τον n_0

Παρατήρηση. Αν επιθυμούμε να δείξουμε μια πρόταση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$, τότε η βάση της επαγωγής είναι η απόδειξη της $P(n_0)$.

Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(n)$ για κάποιο $n \geq n_0$ και αποδεικνύουμε την $P(n+1)$.

Θεώρημα 8

Θεώρημα 8. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

Απόδειξη. Έστω $P(n)$: $2^n > n^2$.

Βήμα 1: Η $P(5)$: $2^5 > 5^2$. Αυτό είναι ΑΛΗΘΕΣ, γιατί $2^5 = 32$ και $5^2 = 25$.

Βήμα 2: Έστω ότι $2^n > n^2$ για κάποιο $n \geq 5$.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8 (συνέχεια)

Έχουμε $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Από την υπόθεση επαγωγής, $n^2 < 2^n$. Άρα, πολλαπλασιάζοντας επί 2 και τις δύο πλευρές, $2n^2 < 2^{n+1}$.

Τώρα,

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 > 0, \qquad (\circledast)$$

αφού $(n-1)^2 \geq (5-1)^2 > 2$.

Οπότε $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Προσοχή: η βάση της επαγωγής

Το ότι η $(\circledast)$ ισχύει για $n \geq 3$ δεν σημαίνει ότι η αρχική πρόταση ισχύει για $n \geq 3$. Το πρώτο βήμα δεν ισχύει ούτε για $n = 3$ ούτε για $n = 4$. Πράγματι, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ και $2^4 = 16 = 4^2$.

Από την άλλη, το πρώτο βήμα ισχύει για $n \in \{0, 1\}$. Πράγματι, $2^0 = 1 > 0$ και $2^1 = 2 > 1$. Αλλά τότε δεν ισχύει η $(\circledast)$.

Η βάση και το επαγωγικό βήμα πρέπει να ισχύουν από το ίδιο σημείο και μετά.

«Θεώρημα»: όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα

Ισχυρισμός. Σε κάθε σύνολο n αλόγων, όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα.

«Απόδειξη». Έστω $P(n)$: σε κάθε σύνολο n αλόγων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.

Βήμα 1: $P(1)$: ένα σύνολο με ένα άλογο. Προφανώς όλα (το ένα) έχουν το ίδιο χρώμα.

Βήμα 2: Έστω ότι η $P(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι η $P(n+1)$ ισχύει.

«Απόδειξη» (συνέχεια)

Έστω σύνολο $\{h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}\}$ με $n+1$ άλογα.

Τα $h_1, \ldots, h_n$ είναι n άλογα, άρα, από την υπόθεση επαγωγής, έχουν όλα το ίδιο χρώμα. Ομοίως, τα $h_2, \ldots, h_{n+1}$ έχουν όλα το ίδιο χρώμα.

Τα δύο αυτά σύνολα έχουν κοινά άλογα, τα $h_2, \ldots, h_n$. Άρα και τα $n+1$ άλογα έχουν το ίδιο χρώμα.

Άρα όλα τα άλογα του κόσμου έχουν το ίδιο χρώμα!

Πού είναι το λάθος;

Η βάση είναι σωστή και η υπόθεση επαγωγής χρησιμοποιείται σωστά. Το λάθος είναι στην *συνεπαγωγή* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Για $n = 1$ το σύνολο έχει 2 άλογα, $\{h_1, h_2\}$. Τα σύνολα $\{h_1\}$ και $\{h_2\}$ **δεν έχουν κανένα κοινό άλογο**: τα $h_2, \ldots, h_n$ είναι κενό σύνολο. Άρα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το h_1 έχει το ίδιο χρώμα με το h_2.

Η συνεπαγωγή $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ισχύει για $n \geq 2$, αλλά όχι για $n = 1$. Η $P(1)$ δεν συνεπάγεται την $P(2)$, άρα η αλυσίδα σπάει στο πρώτο βήμα.

Η κρυφή υπόθεση

Στο επαγωγικό βήμα χρησιμοποιήσαμε ένα κοινό άλογο ως «γέφυρα»:

$$\text{χρώμα}(h_1) = \text{χρώμα}(h_2) = \text{χρώμα}(h_{n+1}).$$

Αυτό απαιτεί να υπάρχει τουλάχιστον ένα κοινό άλογο, δηλαδή $n+1 \geq 3$, ή $n \geq 2$.

$n = 1$:	$\{h_1\}$ και $\{h_2\}$	κοινά: κανένα	×
$n = 2$:	$\{h_1, h_2\}$ και $\{h_2, h_3\}$	κοινό: h_2	✓
$n = 3$:	$\{h_1, h_2, h_3\}$ και $\{h_2, h_3, h_4\}$	κοινά: h_2, h_3	✓

Η «απόδειξη» μοιάζει να δουλεύει για κάθε n, επειδή σιωπηλά φανταζόμαστε ένα «μεγάλο» n.

Θεώρημα 9: άθροισμα διαδοχικών φυσικών

Θεώρημα 9. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Απόδειξη. Έστω $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Βήμα 1: Η $P(1)$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Αυτό είναι ΑΛΗΘΕΣ.

Απόδειξη του Θεωρήματος 9 (συνέχεια)

Βήμα 2: Έστω ότι $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Από την υπόθεση επαγωγής έχουμε $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Άρα

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. ■

Επαγωγή σε υποσύνολα των φυσικών

Η ίδια λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε υποσύνολα των φυσικών αριθμών, π.χ. στους άρτιους. Τότε, για να αποδείξουμε μια πρόταση $P(n)$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να κάνουμε ένα από τα παρακάτω.

- Είτε θέτουμε $n = 2m$ και κάνουμε επαγωγή στο m.
- Είτε αποδεικνύουμε τη βάση της επαγωγής και τη συνεπαγωγή $P(n) \Rightarrow P(n+2)$.

Θεώρημα 10

Θεώρημα 10. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρτιο, το n^2 είναι πολλαπλάσιο του 4. Δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^2 = 4m$. Γράφουμε $4 \mid n^2$.

Απόδειξη. Έστω $P(n)$: $4 \mid n^2$.

Βήμα 1: $4 \mid 0^2$, αφού $0 = 4 \cdot 0$.

Βήμα 2: Έστω ότι $4 \mid n^2$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ άρτιο.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι $4 \mid (n+2)^2$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 10 (συνέχεια)

Έχουμε

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = n^2 + 4(n+1).$$

Από την υπόθεση επαγωγής, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^2 = 4m$. Άρα

$$(n+2)^2 = 4m + 4(n+1) = 4(m+n+1),$$

οπότε $4 \mid (n+2)^2$. ■

Το επόμενο άρτιο μετά το n είναι το $n+2$, γι' αυτό η συνεπαγωγή είναι $P(n) \Rightarrow P(n+2)$.

Θεώρημα 11

Έστω η ακολουθία $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Τότε $a_n < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Έστω $P(n)$: $a_n < 2$.

Βήμα 1: $P(1)$: $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Αληθές.

Βήμα 2: Έστω ότι $a_n < 2$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι $a_{n+1} < 2$. Από την υπόθεση επαγωγής, $2 + a_n < 4$, άρα

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2.$$

Άρα η $P(n+1)$ ισχύει. ■

Ισχυρή μαθηματική επαγωγή

Κάποιες φορές το να γνωρίζουμε ότι η πρόταση ισχύει για έναν μόνο φυσικό αριθμό δεν είναι αρκετό ώστε να πραγματοποιήσουμε το επαγωγικό βήμα. Μια ονομαστή περίπτωση τέτοιου είδους επαγωγής είναι η **ισχυρή μαθηματική επαγωγή**.

Πρώτο βήμα (βάση της επαγωγής): απόδειξη ότι οι προτάσεις $P(0), P(1), \ldots$ (όσες χρειάζονται) είναι αληθείς.

Υπόθεση επαγωγής: έστω ότι ισχύει η $P(m)$ για κάθε $m \leq n$.

Επαγωγικό βήμα: απόδειξη ότι η $P(n+1)$ είναι αληθής.

Θεώρημα 12

Θεωρούμε τους αριθμούς *Fibonacci*: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για $n \geq 2$. Τότε $F_n < 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω $P(n)$: $F_n < 2^n$.

Με απλή επαγωγή: $P(0)$: $F_0 < 2^0$. Αληθές. Αν υποθέσουμε μόνο ότι $F_n < 2^n$, δεν μπορούμε να πούμε κάτι για το $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, γιατί εμπλέκεται και το F_{n-1}.

Με ισχυρή επαγωγή όμως:

Απόδειξη του Θεωρήματος 12 (συνέχεια)

Βήμα 1: $F_0 < 2^0$ και $F_1 < 2^1$. Αληθείς.

Βήμα 2: Έστω ότι $F_m < 2^m$ για κάθε $m < n$, με $n \geq 1$.

Βήμα 3: Θα δείξουμε ότι $F_{n+1} < 2^{n+1}$.

Έχουμε $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Από την υπόθεση επαγωγής, $F_{n+1} < 2^n + 2^{n-1}$. Όμως

$$2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}(2+1) = 3 \cdot 2^{n-1} < 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}.$$

Άρα $F_{n+1} < 2^{n+1}$. ■

Προσοχή στη βάση της επαγωγής!

Παράδειγμα. $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 2$. Έστω $P(n)$: $a_n < 2^n$.

Βήμα 1: $P(0)$: $a_0 < 2^0$. Αληθές.

Βήμα 2: Έστω ότι $a_m < 2^m$ για κάθε $m \leq n$.

Βήμα 3: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < 2^n + 2^{n-1} < 2^{n+1}$.

Όμως $a_1 = 3 > 2^1$, άρα η πρόταση είναι **λάθος**!

Το λάθος: το βήμα 3 χρησιμοποιεί τους δύο προηγούμενους όρους, άρα δουλεύει μόνο για $n \geq 1$. Η βάση έπρεπε να περιλαμβάνει και την $P(1)$, που είναι ψευδής.

Ποιος είναι ο ρόλος ενός αξιώματος σε μια μαθηματική θεωρία;

Quiz question · 52 answers · 52 participants

Είναι πρόταση που αποδεικνύεται από τους ορισμούς. - 7 answers

13%

Είναι πρόταση που δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ως αφετηρία της θεωρίας. - 45 answers

87%

Είναι συντομογραφία για μια νέα έννοια. - 0 answers

0%

Είναι πρόταση που έχει αποδειχθεί ψευδής. - 0 answers

0%

slido

Ορισμός: Ένας φυσικός αριθμός p>1 λέγεται πρώτος αν οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι το 1 και το p. Είναι το 1 πρώτος αριθμός;

Quiz question · 49 answers · 49 participants

Ναι. - 2 answers

4%

Όχι. - 39 answers

80%

Εξαρτάται. - 0 answers

0%

Δεν ορίζεται. - 8 answers

16%

slido

Ποια από τις παρακάτω προσεγγίσεις ΔΕΝ είναι έγκυρος τρόπος απόδειξης της πρότασης "Αν P, τότε Q";

Quiz question · 48 answers · 48 participants

Υποθέτουμε το P και δείχνουμε το Q. - 3 answers

6%

Υποθέτουμε το ¬Q και δείχνουμε το ¬P. - 5 answers

10%

Υποθέτουμε το Q και δείχνουμε το P. - 36 answers

75%

Υποθέτουμε το P και το ¬Q και καταλήγουμε σε άτοπο. - 4 answers

8%

slido

Θέλουμε να αποδείξουμε με αντιθετοαντίστροφη την πρόταση "Αν a+b≥2, τότε a≥1 ή b≥1". Τι αρκεί να δείξουμε;

Quiz question · 48 answers · 48 participants

Αν a+b<2, τότε a<1 και b<1. - 2 answers

4%

Αν a≥1 ή b≥1, τότε a+b≥2. - 3 answers

6%

Αν a<1 ή b<1, τότε a+b<2. - 5 answers

10%

Αν a<1 και b<1, τότε a+b<2. - 38 answers

79%

slido

Θέλουμε να δείξουμε ότι |x^n|=|x|^n για κάθε πραγματικό x και κάθε φυσικό n, χωρίζοντας σε περιπτώσεις. Ποιος διαχωρισμός αρκεί από μόνος του για να υπολογίσουμε το |x^n| και το |x|^n σε κάθε περίπτωση;

Quiz question · 49 answers · 49 participants

x=0 και x≠0. - 4 answers

8%

x>0 και x<0. - 2 answers

4%

x≥0, και x<0 με n άρτιο, και x<0 με n περιττό. - 35 answers

71%

n άρτιος και n περιττός. - 8 answers

16%

slido

Αποδεικνύουμε με άτοπο ότι ο √2 είναι άρρητος. Υποθέτουμε ότι √2=a/b, με a,b ακέραιους πρώτους μεταξύ τους. Ποιο από τα παρακάτω προκύπτει άμεσα από την ισότητα a^2=2b^2;

Quiz question · 51 answers · 51 participants

Ο a^2 είναι άρτιος. - 48 answers

94%

Ο b^2 είναι περιττός. - 0 answers

0%

Ο a είναι περιττός. - 1 answer

2%

Ο b είναι άρτιος. - 2 answers

4%

slido

Θέλουμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει μικρότερος θετικός ρητός αριθμός. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ο r, ο μικρότερος θετικός ρητός. Ποιος αριθμός οδηγεί στο άτοπο;

Quiz question · 48 answers · 48 participants

O r^2. - 0 answers

0%

O √r. - 12 answers

25%

O r/2. - 36 answers

75%

O 2r. - 0 answers

0%

slido

Για να δείξουμε ότι το 1 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός, ακολουθούμε με τη σειρά τα παρακάτω βήματα με στόχο την εις άτοπο απαγωγή. Σε ποιο από τα βήματα έγινε το λάθος;

Quiz question · 39 answers · 39 participants

Βήμα 1: Υποθέτουμε ότι το 1 δεν είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός. - 1 answer

3%

Βήμα 2: Έστω n ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός. - 11 answers

28%

Βήμα 3: Τότε n > 1. - 2 answers

5%

Βήμα 4: Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανισότητας αυτής με τον θετικό αριθμό n έχουμε n^2 > 1·n = n. - 12 answers

31%

Βήμα 5: Ο n^2 είναι ακέραιος. Δηλαδή βρήκαμε έναν ακέραιο αριθμό, τον n^2, (γνήσια) μεγαλύτερο από τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό n, άτοπο. - 13 answers

33%

slido

Θέλουμε να αποδείξουμε με εις άτοπον απαγωγή τον ισχυρισμό: "Αν το γινόμενο ab δύο ακεραίων είναι περιττός αριθμός, τότε και οι a και b είναι περιττοί". Σε ποιο βήμα έγινε το λάθος;

Quiz question · 47 answers · 47 participants

Βήμα 1: Υποθέτουμε ότι ο ab είναι περιττός και ότι κανένας από τους a, b δεν είναι περιττός, δηλαδή και οι δύο είναι άρτιοι. - 32 answers

68%

Βήμα 2: Τότε a=2m και b=2n για κάποιους ακέραιους m, n. - 1 answer

2%

Βήμα 3: Άρα ab=4mn, που είναι άρτιος. - 1 answer

2%

Βήμα 4: Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι ο ab είναι περιττός. - 0 answers

0%

Βήμα 5: Άρα οι a και b είναι και οι δύο περιττοί. - 13 answers

28%

slido

Αν το άθροισμα δυο ακεραίων x και y είναι άρτιος αριθμός, τι μπορώ να συμπεράνω για τους αριθμούς x και y;

Quiz question · 49 answers · 49 participants

Είναι και οι δύο άρτιοι. - 0 answers

0%

Είναι και οι δύο περιττοί. - 1 answer

2%

Η διαφορά τους είναι άρτιος αριθμός. - 44 answers

90%

Το γινόμενό τους είναι άρτιος αριθμός. - 4 answers

8%

slido