Μαθηματική Επαγωγή, Σχέσεις και Απεικονίσεις

Σημειώσεις μαθήματος

Περιεχόμενα

1 Παραδείγματα μαθηματικής επαγωγής **1**

1.1 Άθροισμα τετραγώνων 1

1.2 Πρώτοι αριθμοί και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής 2

1.3 Πλακόστρωση σκακιέρας με τριομίνα 3

1.4 Οι Πύργοι του Ανόι 4

2 Σύνολα, σχέσεις και απεικονίσεις **5**

2.1 Καρτεσιανό γινόμενο 5

2.2 Σχέσεις 6

2.3 Απεικονίσεις 6

2.4 Εικόνα και αντίστροφη εικόνα 7

3 Εφαρμογή: το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου **8**

1 Παραδείγματα μαθηματικής επαγωγής

1.1 Άθροισμα τετραγώνων

Θεώρημα 13. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την πρόταση

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ΒΗΜΑ 1: Για $n = 1$: $1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. ΑΛΗΘΗΣ.

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \qquad (*)$$

Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2.$$

Από την υπόθεση επαγωγής, το τελευταίο είναι ίσο με:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\big[n(2n+1)+6(n+1)\big]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

Επίσης, έχουμε:

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+4n+3n+6 = 2n^2+7n+6,$$

και άρα η $(*)$ ισχύει. □

1.2 Πρώτοι αριθμοί και το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Ορισμός. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι το m είναι **διαιρέτης** του n, ή ότι το n είναι **πολλαπλάσιο** του m, αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n = m \cdot k$.

Ορισμός. Ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται **πρώτος** αν $n > 1$ και οι μόνοι διαιρέτες του n είναι το 1 και το n. Αν $n > 1$ και ο n δεν είναι πρώτος, τότε ο n λέγεται **σύνθετος**.

Θεώρημα 14 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής – 1ο μισό)**.** *Κάθε φυσικός αριθμός $n > 1$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.*

Απόδειξη. $P(n)$: ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

ΒΗΜΑ 1: $P(2)$: ΑΛΗΘΗΣ (ο 2 είναι πρώτος).

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι κάθε m με $2 \le m < n$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων αριθμών.

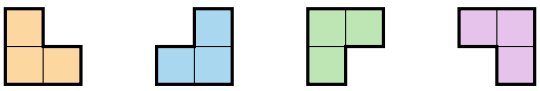
Αν ο n είναι πρώτος, τότε η πρόταση ισχύει.

Αν ο n δεν είναι πρώτος, τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $1 < n_1, n_2 < n$ τέτοια ώστε $n = n_1 n_2$. Από την υπόθεση επαγωγής, οι n_1 και n_2 γράφονται ως γινόμενα πρώτων αριθμών και άρα ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων. □

Παρατήρηση. Στο ΒΗΜΑ 2 υποθέσαμε ότι η πρόταση ισχύει για *όλους* τους αριθμούς μικρότερους του n, και όχι μόνο για τον $n-1$ (*ισχυρή επαγωγή*). Αυτό χρειάζεται, γιατί οι n_1, n_2 δεν είναι κατ' ανάγκη ίσοι με $n-1$.

1.3 Πλακόστρωση σκακιέρας με τριμίνα

Ένα **τριμίνο** (σχήματος Γ) είναι ένα σχήμα αποτελούμενο από τρία τετράγωνα 1×1, όπως στο σχήμα (σε οποιονδήποτε προσανατολισμό):



Θεώρημα 15. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν από μια σκακιέρα διαστάσεων $2^n \times 2^n$ αφαιρέσουμε οποιοδήποτε τετράγωνο, τότε η σκακιέρα που απομένει μπορεί να καλυφθεί πλήρως με τριομίνα, χωρίς επικαλύψεις.*

Παρατήρηση. Μια αναγκαία συνθήκη είναι το πλήθος των τετραγώνων που απομένουν, $4^n - 1$, να διαιρείται με το 3. Πράγματι αυτό ισχύει, αφού $4^n - 1 = (4-1)(4^{n-1} + \cdots + 4 + 1)$. (Δοκιμάστε να το αποδείξετε και με επαγωγή.) Αυτό όμως δεν αρκεί: πρέπει να δείξουμε ότι η κάλυψη μπορεί πράγματι να γίνει.

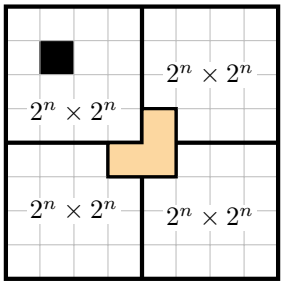
Απόδειξη. $P(n)$: κάθε σκακιέρα $2^n \times 2^n$ με ένα τετράγωνο αφαιρεμένο (οπουδήποτε) καλύπτεται με τριομίνα.

ΒΗΜΑ 1: $n = 1$: μια σκακιέρα 2×2 με ένα τετράγωνο αφαιρεμένο είναι η ίδια ένα τριομίνο. ΑΛΗΘΗΣ.

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι η $P(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

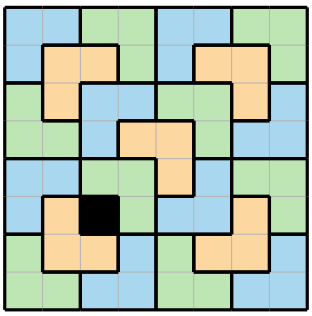
ΒΗΜΑ 3: Θεωρούμε μια σκακιέρα $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ από την οποία έχει αφαιρεθεί ένα τετράγωνο. Τη χωρίζουμε σε τέσσερα τεταρτημόρια, το καθένα διαστάσεων $2^n \times 2^n$ (αφού $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$). Το αφαιρεμένο τετράγωνο βρίσκεται σε ακριβώς ένα από αυτά.

Τοποθετούμε ένα τριομίνο στο κέντρο της σκακιέρας, έτσι ώστε να καλύπτει το γωνιακό (κεντρικό) τετράγωνο καθενός από τα *άλλα τρία* τεταρτημόρια:



Τώρα κάθε ένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια είναι μια σκακιέρα $2^n \times 2^n$ με ένα τετράγωνο «αφαιρεμένο» (είτε το αρχικό αφαιρεμένο τετράγωνο, είτε το τετράγωνο που κάλυψε το κεντρικό τριομίνο). Από την υπόθεση επαγωγής, κάθε τεταρτημόριο καλύπτεται με τριομίνα. Μαζί με το κεντρικό τριομίνο, παίρνουμε μια κάλυψη ολόκληρης της σκακιέρας. □

Παράδειγμα. Η απόδειξη είναι *κατασκευαστική*: εφαρμόζοντάς την επαναληπτικά παίρνουμε την παρακάτω κάλυψη μιας σκακιέρας 8×8 (το μαύρο τετράγωνο είναι το αφαιρεμένο) με $(64-1)/3 = 21$ τριομίνα.



1.4 Οι Πύργοι του Ανόι

Πρόβλημα. Έχουμε τρεις στύλους Α, Β, Γ. Στον στύλο Α υπάρχουν n δίσκοι, όλοι διαφορετικού μεγέθους, τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο ώστε κάθε δίσκος να βρίσκεται πάνω σε μεγαλύτερό

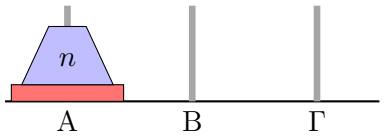
του. Μια **κίνηση** είναι η μεταφορά του πάνω δίσκου ενός στύλου στην κορυφή ενός άλλου στύλου, με τον κανόνα ότι *ποτέ δεν τοποθετούμε δίσκο πάνω σε μικρότερό του*. Ζητείται να μεταφερθούν όλοι οι δίσκοι από τον στύλο Α στον στύλο Γ.

Θεώρημα 16. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$:*

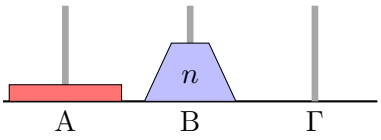
(α′) οι n δίσκοι μπορούν να μεταφερθούν από έναν στύλο σε έναν άλλο με $2^n - 1$ κινήσεις·

(β′) δεν μπορούν να μεταφερθούν με λιγότερες από $2^n - 1$ κινήσεις.

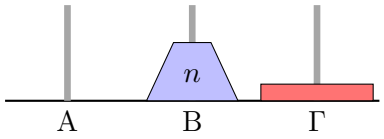
Η ιδέα της απόδειξης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: για να μετακινηθεί ο μεγαλύτερος δίσκος, πρέπει πρώτα όλοι οι άλλοι να έχουν «παρκάρει» στον τρίτο στύλο.



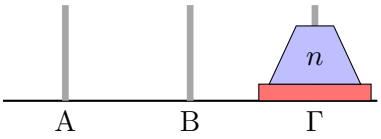
(α) Αρχή: $n+1$ δίσκοι στον Α.



(β) Μετά από $2^n - 1$ κινήσεις.



(γ) Μετά από 1 ακόμα κίνηση.



(δ) Μετά από $2^n - 1$ ακόμα κινήσεις.

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε την πρόταση

$P(n)$: n δίσκοι μπορούν να μεταφερθούν από οποιονδήποτε στύλο σε οποιονδήποτε άλλο στύλο με $2^n - 1$ κινήσεις, ακόμα κι αν στους στύλους υπάρχουν από κάτω τους άλλοι, μεγαλύτεροι, δίσκοι.

(Οι μεγαλύτεροι δίσκοι δεν μας ενοχλούν: μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιονδήποτε από τους n δίσκους πάνω τους.)

ΒΗΜΑ 1: $n = 1$: μεταφέρουμε τον δίσκο με $1 = 2^1 - 1$ κίνηση. ΑΛΗΘΗΣ.

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι η $P(n)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

ΒΗΜΑ 3: Θα δείξουμε ότι $n+1$ δίσκοι μεταφέρονται, π.χ. από τον Α στον Γ, με $2^{n+1} - 1$ κινήσεις.

- Μεταφέρουμε τους n μικρότερους δίσκους από τον Α στον Β. Από την υπόθεση επαγωγής (ο μεγαλύτερος δίσκος βρίσκεται κάτω από αυτούς και δεν μας ενοχλεί) αυτό γίνεται με $2^n - 1$ κινήσεις.
- Μεταφέρουμε τον μεγαλύτερο δίσκο από τον Α στον (άδειο) Γ: 1 κίνηση.
- Μεταφέρουμε τους n μικρότερους δίσκους από τον Β στον Γ, πάνω από τον μεγαλύτερο: από την υπόθεση επαγωγής, $2^n - 1$ κινήσεις.

Συνολικά: $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ κινήσεις.

(β) Έστω $T(n)$ ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που χρειάζεται για να μεταφερθούν n δίσκοι από έναν στύλο σε έναν άλλο. (Λόγω συμμετρίας, ο αριθμός αυτός δεν εξαρτάται από το ποιοι είναι οι δύο στύλοι.) Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $T(n) \geq 2^n - 1$.

ΒΗΜΑ 1: $T(1) \geq 1 = 2^1 - 1$, αφού χρειάζεται τουλάχιστον μία κίνηση. ΑΛΗΘΗΣ.

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι $T(n) \geq 2^n - 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

ΒΗΜΑ 3: Θεωρούμε οποιονδήποτε τρόπο να μεταφερθούν $n+1$ δίσκοι από τον Α στον Γ. Ο μεγαλύτερος δίσκος πρέπει να μετακινηθεί τουλάχιστον μία φορά.

- Τη στιγμή της *πρώτης* κίνησης του μεγαλύτερου δίσκου, αυτός είναι ο μόνος δίσκος στον Α (αλλιώς δεν θα ήταν στην κορυφή) και ο στύλος στον οποίο πηγαίνει είναι άδειος (αλλιώς θα τοποθετούνταν πάνω σε μικρότερο). Άρα οι n μικρότεροι δίσκοι βρίσκονται όλοι στον τρίτο στύλο. Επομένως, πριν από αυτή την κίνηση, οι n μικρότεροι δίσκοι έχουν μεταφερθεί από τον Α σε έναν άλλο στύλο: αυτό απαιτεί τουλάχιστον $T(n)$ κινήσεις.
- Με τον ίδιο τρόπο, τη στιγμή της *τελευταίας* κίνησης του μεγαλύτερου δίσκου (προς τον Γ), οι n μικρότεροι δίσκοι βρίσκονται όλοι σε έναν στύλο διαφορετικό από τον Γ. Μετά από αυτή την κίνηση πρέπει να μεταφερθούν στον Γ: τουλάχιστον $T(n)$ κινήσεις.

Οι δύο ομάδες κινήσεων και η κίνηση (ή οι κινήσεις) του μεγαλύτερου δίσκου είναι διαφορετικές μεταξύ τους, άρα

$$T(n+1) \;\geq\; T(n) + 1 + T(n) \;\geq\; 2(2^n - 1) + 1 \;=\; 2^{n+1} - 1,$$

όπου στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση επαγωγής. □

Παρατήρηση. Από τα (α) και (β) έπεται ότι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι ακριβώς $T(n) = 2^n - 1$, και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$T(1) = 1, \qquad T(n+1) = 2T(n) + 1.$$

Για παράδειγμα, $T(1) = 1$, $T(2) = 3$, $T(3) = 7$, $T(4) = 15$. Για $n = 3$ οι 7 κινήσεις είναι:

$$\text{Α} \to \Gamma,\ \text{Α} \to \text{Β},\ \Gamma \to \text{Β},\ \text{Α} \to \Gamma,\ \text{Β} \to \text{Α},\ \text{Β} \to \Gamma,\ \text{Α} \to \Gamma.$$

Για $n = 64$ δίσκους χρειάζονται $2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$ κινήσεις!

2 Σύνολα, σχέσεις και απεικονίσεις

2.1 Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω A, B σύνολα. Το **καρτεσιανό γινόμενο** του A και του B είναι το σύνολο

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Παράδειγμα. Για $A = \{x, y\}$, $B = \{1, 2, 3\}$:

$$A \times B = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\},$$
$$B \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

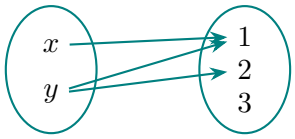
! $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

2.2 Σχέσεις

Ορισμός. Μια **σχέση** μεταξύ στοιχείων του A και στοιχείων του B είναι ένα υποσύνολο R του $A \times B$. Θα γράφουμε aRb αν $(a, b) \in R$.

Παραδείγματα.

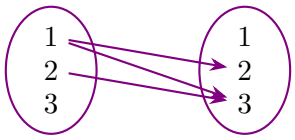
- $R = \{(x,1),(y,1),(y,2)\} \subseteq A \times B$,
  δηλαδή $xR1$, $yR1$, $yR2$.



- $\tilde{R} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\} \subseteq B \times B$,
  δηλαδή $1\tilde{R}2$, $1\tilde{R}3$, $2\tilde{R}3$. Παρατηρούμε ότι

$$\tilde{R} = \{(b,b') \in B \times B \mid b < b'\},$$

  δηλαδή η $\tilde{R}$ είναι η σχέση «<».



2.3 Απεικονίσεις

Ορισμός. Μια **απεικόνιση** μεταξύ στοιχείων του A και στοιχείων του B είναι μια σχέση R που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- για κάθε $a \in A$, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε aRb·
- αν aRb, $a'Rb'$ και $a = a'$, τότε $b = b'$ (όπου $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$).

Ισοδύναμα: για κάθε $a \in A$, υπάρχει *μοναδικό* $b \in B$ τέτοιο ώστε aRb.

Συμβολισμός: $f\colon A \to B$, $a \mapsto f(a) = b$ αν aRb.

Παράδειγμα. Η R δεν είναι απεικόνιση (το y σχετίζεται με δύο στοιχεία, το 1 και το 2). Η $\tilde{R}$ δεν είναι απεικόνιση (το 3 δεν σχετίζεται με κανένα στοιχείο, ενώ το 1 σχετίζεται με δύο).

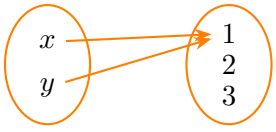
Παρατήρηση. Η λέξη «απεικόνιση» συνηθίζεται στην Άλγεβρα. Στην Ανάλυση, λέμε «συνάρτηση».

Ορισμοί. Έστω $f\colon A \to B$ μια απεικόνιση.

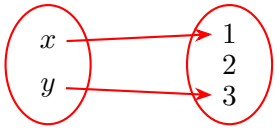
- Η f είναι **1-1** αν η f ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη για κάθε $a, a' \in A$: αν $a \neq a'$, τότε $f(a) \neq f(a')$
  (ισοδύναμα: αν $f(a) = f(a')$, τότε $a = a'$).
- Η f είναι **επί** αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a_b \in A$ τέτοιο ώστε $f(a_b) = b$.
- Η f είναι **αντιστρέψιμη** αν είναι 1-1 και επί. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την **αντίστροφη απεικόνιση** $f^{-1}\colon B \to A$, όπου $f^{-1}(b) = a_b$. Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη γιατί η f είναι 1-1 (άρα το a_b είναι μοναδικό).
- Αν $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ απεικονίσεις, ορίζουμε τη **σύνθεση** $g \circ f\colon A \to C$ ως

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) \quad \text{για κάθε } a \in A.$$

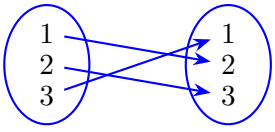
Παραδείγματα.



Όχι 1-1, όχι επί
$f(x) = 1$, $f(y) = 1$



1-1, όχι επί
$g(x) = 1$, $g(y) = 3$



1-1 και επί
$h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 1$

Παρατήρηση. Αν η f είναι 1-1 και επί, τότε

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A\colon A \to A, \quad a \mapsto a,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\colon B \to B, \quad b \mapsto b.$$

Παραδείγματα.

- $\mathrm{id}_A \colon A \to A$ είναι 1-1 και επί.
- $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί $\quad (f(1) = f(-1), \text{ και } x^2 \neq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$.
- $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ δεν είναι 1-1, αλλά είναι επί $\quad (f(1) = f(-1))$.
- $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί.

2.4 Εικόνα και αντίστροφη εικόνα

Συμβολισμοί: Έστω $f \colon A \to B$ απεικόνιση, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$.

- $f(C) = \{f(c) \mid c \in C\}$ $\quad$ (εικόνα του C),
- $f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$ $\quad$ (αντίστροφη εικόνα του D).

Προσοχή: ο συμβολισμός $f^{-1}(D)$ έχει νόημα για *κάθε* απεικόνιση f, ακόμα κι αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

Παρατηρήσεις.

- $f(A) \subseteq B$.
- f επί $\iff f(A) = B$.
- f επί $\iff |f^{-1}(\{b\})| \geq 1$ για κάθε $b \in B$.
- f 1-1 $\iff |f^{-1}(\{b\})| \leq 1$ για κάθε $b \in B$.
- f αντιστρέψιμη $\iff |f^{-1}(\{b\})| = 1$ για κάθε $b \in B$.
  Αν $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$, τότε $f^{-1}(b) = a$.
- $f^{-1}(B) = A$.

Παράδειγμα. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

$$f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}, \qquad f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing, \qquad f^{-1}(\{0\}) = \{0\},$$
$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}.$$

3 Εφαρμογή: το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου

Για ένα σύνολο A, συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A (**δυναμοσύνολο** του A). Για παράδειγμα,

$$\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\varnothing,\ \{x\},\ \{y\},\ \{x, y\}\}.$$

Επίσης, γράφουμε

$$\{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ φορές}} = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}\}.$$

Εφαρμόζοντας επανειλημμένα τον τύπο $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, έχουμε $|\{0,1\}^n| = 2^n$.

Πρόταση 17. *Ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα, δηλαδή αν $|A| = n$ τότε $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.*

1η απόδειξη: αντιστοιχία με το $\{0,1\}^n$

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^n, \qquad \varphi(S) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \quad \text{όπου} \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } a_i \in S, \\ 0, & \text{αν } a_i \notin S. \end{cases}$$

Δηλαδή η i-οστή συντεταγμένη του $\varphi(S)$ μας λέει αν το a_i ανήκει ή όχι στο S.

Η φ είναι 1-1. Έστω $S, S' \subseteq A$ με $\varphi(S) = \varphi(S')$. Τότε για κάθε i, οι i-οστές συντεταγμένες είναι ίσες, δηλαδή $a_i \in S \iff a_i \in S'$. Άρα $S = S'$.

Η φ είναι επί. Έστω $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Θέτουμε $S = \{a_i \mid \varepsilon_i = 1\} \subseteq A$. Τότε $\varphi(S) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Άρα η φ είναι αντιστρέψιμη. Από τις Παρατηρήσεις της προηγούμενης ενότητας, $|\varphi^{-1}(\{b\})| = 1$ για κάθε $b \in \{0,1\}^n$, οπότε τα στοιχεία του $\mathcal{P}(A)$ και του $\{0,1\}^n$ αντιστοιχούν ένα προς ένα και

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^n| = 2^n. \qquad \square$$

Παράδειγμα. Για $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ η αντιστοιχία φ είναι:

S	$\varphi(S)$	S	$\varphi(S)$
$\varnothing$	$(0,0,0)$	$\{a_3\}$	$(0,0,1)$
$\{a_1\}$	$(1,0,0)$	$\{a_1, a_3\}$	$(1,0,1)$
$\{a_2\}$	$(0,1,0)$	$\{a_2, a_3\}$	$(0,1,1)$
$\{a_1, a_2\}$	$(1,1,0)$	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$(1,1,1)$

δηλαδή $2^3 = 8$ υποσύνολα.

2η απόδειξη: με επαγωγή

Απόδειξη. $P(n)$: κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

ΒΗΜΑ 1: $n = 0$: το κενό σύνολο έχει ακριβώς ένα υποσύνολο, το $\varnothing$, και $2^0 = 1$. ΑΛΗΘΗΣ. (Αντίστοιχα για $n = 1$: το $\{a\}$ έχει τα υποσύνολα $\varnothing$ και $\{a\}$, δηλαδή $2^1 = 2$.)

ΒΗΜΑ 2: Έστω ότι κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα, για κάποιο n.

ΒΗΜΑ 3: Έστω A ένα σύνολο με $n+1$ στοιχεία. Θα δείξουμε ότι το A έχει 2^{n+1} υποσύνολα.

Επιλέγουμε ένα στοιχείο $a \in A$ και θέτουμε $A' = A \setminus \{a\}$, οπότε $|A'| = n$. Χωρίζουμε τα υποσύνολα του A σε δύο ξένες ομάδες:

- *Υποσύνολα που δεν περιέχουν το a.* Αυτά είναι ακριβώς τα υποσύνολα του A', άρα από την υπόθεση επαγωγής είναι 2^n.
- *Υποσύνολα που περιέχουν το a.* Η απεικόνιση

  $$\{S \subseteq A \mid a \in S\} \to \mathcal{P}(A'), \qquad S \mapsto S \setminus \{a\}$$

  είναι αντιστρέψιμη, με αντίστροφη την $T \mapsto T \cup \{a\}$. Άρα και αυτά είναι όσα τα υποσύνολα του A', δηλαδή 2^n.

Συνολικά, το A έχει $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ υποσύνολα. $\square$