Θεμέλια Άλγεβρας και Γεωμετρίας

Σχέσεις, απεικονίσεις και πράξεις

Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω A, B δύο σύνολα. Το **καρτεσιανό γινόμενο** των A και B είναι το σύνολο

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Παράδειγμα: για $A = \{x, y\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$ έχουμε

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\},$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

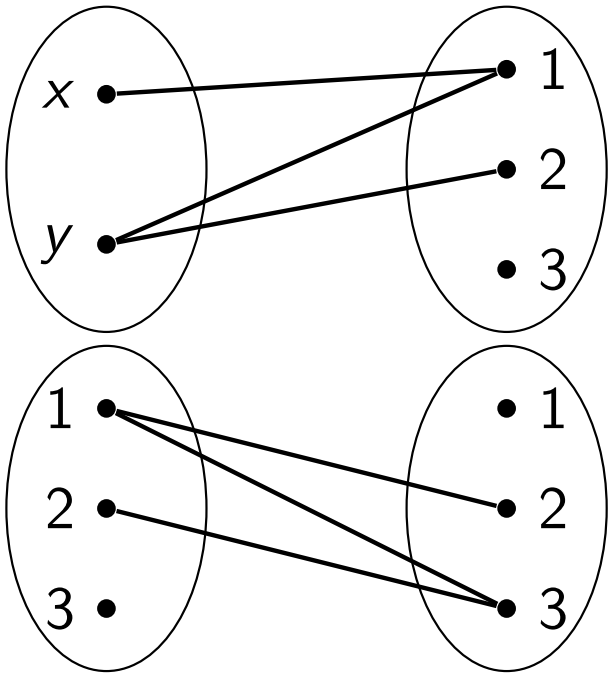
Προσοχή: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Σχέσεις

Μια **σχέση** μεταξύ στοιχείων του A και στοιχείων του B είναι ένα υποσύνολο R του $A \times B$. Γράφουμε aRb αν $(a, b) \in R$.

Για $A = \{x, y\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, έστω

$$R = \{(x, 1), (y, 1), (y, 2)\}.$$



Τότε $xR1$, $yR1$, $yR2$.
Στο $B \times B$ ορίζουμε

$$\widetilde{R} = \{(b, b') \in B \times B \mid b < b'\}$$

$$= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Τότε $1\widetilde{R}2$, $1\widetilde{R}3$, $2\widetilde{R}3$.

Απεικονίσεις

Μια **απεικόνιση** μεταξύ στοιχείων του A και στοιχείων του B είναι μια σχέση R που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- για κάθε $a \in A$, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε aRb,
- αν aRb, $a'Rb'$ και $a = a'$, τότε $b = b'$ (όπου $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$).

Ισοδύναμα: για κάθε $a \in A$, υπάρχει *μοναδικό* $b \in B$ τέτοιο ώστε aRb.

Συμβολισμός: $f : A \to B$, $a \mapsto f(a) = b$ αν aRb.

Οι σχέσεις R και $\widetilde{R}$ της προηγούμενης διαφάνειας δεν είναι απεικονίσεις. (Στην R, το x δεν έχει μοναδική εικόνα στο B αλλά το y έχει δύο. Στην $\widetilde{R}$, το 1 έχει δύο εικόνες και το 3 καμία.)

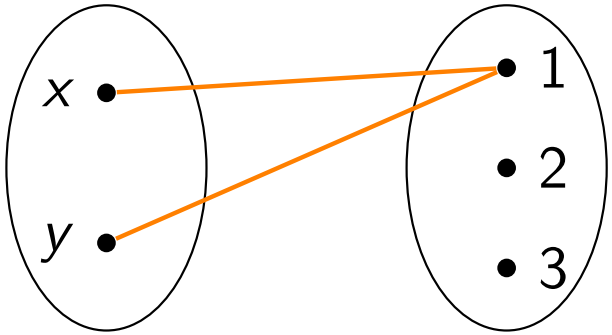
Παρατήρηση. Η λέξη «απεικόνιση» συνηθίζεται στην Άλγεβρα. Στην Ανάλυση, λέμε «συνάρτηση».

Ορισμοί

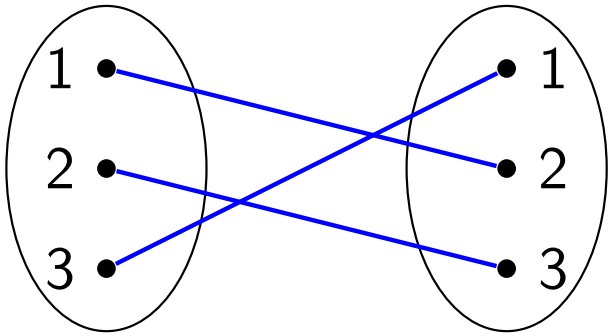
Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση.

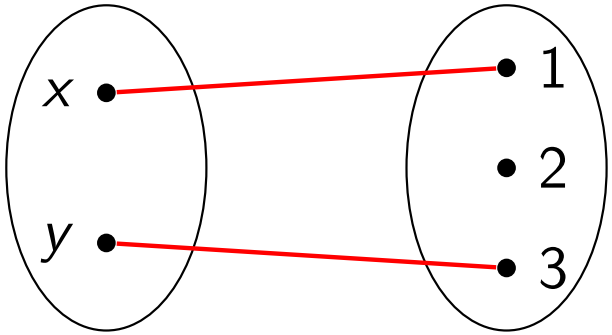
- Η f είναι 1-1 αν ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη για κάθε $a, a' \in A$: αν $a \neq a'$, τότε $f(a) \neq f(a')$. Ισοδύναμα: αν $f(a) = f(a')$, τότε $a = a'$.
- Η f είναι **επί** αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a_b \in A$ τέτοιο ώστε $f(a_b) = b$.
- Η f είναι **αντιστρέψιμη** αν είναι 1-1 και επί.

Παραδείγματα απεικονίσεων



Όχι 1-1, όχι επί: $f(x) = 1$, $f(y) = 1$.





1-1, όχι επί: $g(x) = 1$, $g(y) = 3$.

1-1 και επί:
$h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 1$.

Αντίστροφη απεικόνιση και σύνθεση

Αν η $f : A \to B$ είναι αντιστρέψιμη, ορίζουμε την **αντίστροφη απεικόνιση**

$$f^{-1} : B \to A, \qquad f^{-1}(b) = a_b.$$

Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη γιατί η f είναι 1-1.

Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι απεικονίσεις, ορίζουμε τη **σύνθεση**

$$g \circ f : A \to C, \qquad (g \circ f)(a) = g(f(a)) \ \text{ για κάθε } a \in A.$$

Παρατήρηση. Αν η f είναι 1-1 και επί, τότε

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A : A \to A,\ a \mapsto a, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B : B \to B,\ b \mapsto b.$$

Παραδείγματα

- Η $\mathrm{id}_A : A \to A$ είναι 1-1 και επί.
- Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί. Δεν είναι επί γιατί $x^2 \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δεν είναι 1-1 γιατί $f(1) = f(-1)$.
- Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ δεν είναι 1-1, αλλά είναι επί.
- Η $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ είναι 1-1 και επί.

Εικόνα και αντίστροφη εικόνα

Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση, $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$. Ορίζουμε

$$f(C) = \{f(c) \mid c \in C\}, \qquad f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}.$$

Παρατηρήσεις:

- $f(A) \subseteq B$.
- Η f είναι επί $\Leftrightarrow f(A) = B$.
- Η f είναι επί $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{b\})| \geq 1$ για κάθε $b \in B$.
- Η f είναι 1-1 $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{b\})| \leq 1$ για κάθε $b \in B$.
- Η f είναι αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow |f^{-1}(\{b\})| = 1$ για κάθε $b \in B$. Αν $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$, τότε $f^{-1}(b) = a$.
- $f^{-1}(B) = A$.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Τότε:

$$f^{-1}(\{1\}) = \{1, -1\}, \qquad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset, \qquad f^{-1}(\{0\}) = \{0\},$$

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = \mathbb{R}^*.$$

Εσωτερική πράξη

Ορισμός. Μια (εσωτερική) **πράξη** στο A είναι μια απεικόνιση $A \times A \to A$:

$$* : A \times A \to A, \qquad (a, b) \mapsto c = a * b.$$

Παραδείγματα:

- **Πρόσθεση** στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, στο $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και στο σύνολο $\mathbb{K}[X]$ των πολυωνύμων.
- **Πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{K}$.
- Πολλαπλασιασμός στο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- Πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}[X]$.
- **Σύνθεση συναρτήσεων** $A \to A$.

Προσεταιριστικότητα και μεταθετικότητα

Ορισμός. Έστω $* : A \times A \to A$ μια πράξη.

- Η πράξη $*$ ονομάζεται **προσεταιριστική** αν

$$(a * b) * c = a * (b * c) \qquad \text{για κάθε } a, b, c \in A.$$

- Η πράξη $*$ ονομάζεται **μεταθετική** αν

$$a * b = b * a \qquad \text{για κάθε } a, b \in A.$$

Παραδείγματα

Παραδείγματα:

- **Πρόσθεση** στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, στο $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και στο σύνολο $\mathbb{K}[X]$ των πολυωνύμων. Είναι προσεταιριστική και μεταθετική.
- **Πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{N}$ ή στο $\mathbb{K}$. Είναι προσεταιριστικός και μεταθετικός.
- Πολλαπλασιασμός στο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Είναι προσεταιριστικός, όχι μεταθετικός.
- Πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}[X]$. Είναι προσεταιριστικός και μεταθετικός.
- **Σύνθεση συναρτήσεων** $A \to A$. Είναι προσεταιριστική, όχι μεταθετική: για παράδειγμα, $\sin(e^x) \neq e^{\sin x}$.

Ουδέτερο στοιχείο

Ορισμός. Ένα στοιχείο $e \in A$ ονομάζεται **ουδέτερο** για την πράξη $*$ αν

$$e * a = a * e = a \qquad \text{για κάθε } a \in A.$$

(Το $e * a = a$ λέει ότι το e είναι αριστερό ουδέτερο και το $a * e = a$ ότι είναι δεξιό.)

Λήμμα. Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, τότε είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Έστω e, e' δύο ουδέτερα στοιχεία. Τότε

$$e = e * e' = e'.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί το e' είναι ουδέτερο, και η δεύτερη γιατί το e είναι ουδέτερο. ■

Παραδείγματα ουδέτερων στοιχείων

- Στην πρόσθεση, το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 0.
- Στον πολλαπλασιασμό, το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 1.
- Στη σύνθεση συναρτήσεων, το ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_A : A \to A$, $x \mapsto x$.

Αντίστροφο στοιχείο

Ορισμός. Έστω $* : A \times A \to A$ μια πράξη με ουδέτερο στοιχείο e. Ένα στοιχείο $a \in A$ είναι **αντιστρέψιμο** αν υπάρχει $a' \in A$ τέτοιο ώστε

$$a' * a = a * a' = e.$$

Το στοιχείο a' ονομάζεται **αντίστροφο** του a.

Λήμμα. Αν ένα στοιχείο $a \in A$ είναι αντιστρέψιμο, τότε το αντίστροφό του είναι μοναδικό, αν η πράξη είναι προσεταιριστική.

Απόδειξη. Έστω a', a'' δύο αντίστροφα του a. Τότε

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''.$$

■

Παραδείγματα αντίστροφων

- Στην πρόσθεση, το αντίστροφο του a συμβολίζεται με $-a$ και λέγεται *αντίθετος* του a.
- Στον πολλαπλασιασμό, το αντίστροφο του a συμβολίζεται με a^{-1} ή $1/a$.
- Στη σύνθεση συναρτήσεων, το αντίστροφο μιας απεικόνισης f συμβολίζεται με f^{-1}.

Παρατηρήσεις:

- Η αφαίρεση $a - b$ είναι η πρόσθεση $a + (-b)$.
- Η διαίρεση a/b είναι ο πολλαπλασιασμός $a \cdot b^{-1}$.
- Στην Άλγεβρα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα του πολλαπλασιασμού $(\cdot,\ 1,\ a^{-1})$ για πράξεις που δεν έχουν *standard* συμβολισμό.

Ποια στοιχεία είναι αντιστρέψιμα;

Πρόσθεση. Σε όλα τα παραδείγματα που δώσαμε, εκτός από το $\mathbb{N}$, όλα τα στοιχεία έχουν αντίθετο.

Πολλαπλασιασμός. Τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα.

- Στο $\mathbb{N}$, το μόνο αντιστρέψιμο στοιχείο είναι το 1.
- Στο $\mathbb{Z}$, τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία είναι το 1 και το -1.
- Στα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (τα οποία είναι *σώματα*), όλα τα στοιχεία εκτός του 0 είναι αντιστρέψιμα.
- Στο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, οι αντιστρέψιμοι πίνακες είναι αυτοί των οποίων η ορίζουσα είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{K}$.
- Στο $\mathbb{K}[X]$, τα αντιστρέψιμα πολυώνυμα είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{K}$ (ως προς τον πολλαπλασιασμό).

Σύνθεση. Μια απεικόνιση $f : A \to A$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν η f είναι 1-1 και επί.

Ο συμβολισμός $A^\times$

Συμβολισμός. $A^\times = \{a \in A \mid a \text{ αντιστρέψιμο}\}$.

Παραδείγματα, για την πράξη του πολλαπλασιασμού:

$$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}^* = (\mathbb{R}[X])^\times,$$

$$\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\} = (\mathbb{Z}[X])^\times,$$

$$\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})\right)^\times = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; ad - bc = \pm 1 \right\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ένα παράδειγμα: η πράξη $x * y = x + y - xy$ στο $\mathbb{R}$

Ορίζουμε $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y - xy$.

Η $*$ είναι προσεταιριστική:

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = x + y - xy + z - zx - zy + xyz,$$
$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz.$$

Οι δύο παραστάσεις είναι ίσες.

Η $*$ είναι μεταθετική:

$$x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x.$$

Ουδέτερο στοιχείο της $*$

Αν $x * y = x$, τότε $x + y - xy = x$, οπότε $y - xy = y(1 - x) = 0$.

Για να ισχύει αυτό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $y = 0$.

Έχουμε $x * 0 = 0 * x = x$ (η πράξη είναι μεταθετική).

Άρα το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $*$.

Αντιστρέψιμα στοιχεία της $*$

Ποια είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ως προς την $*$;

Αν $x * y = 0$, τότε $x + y - xy = 0$ και άρα $y(x-1) = x$.

Αν $x \neq 1$, τότε $y = \dfrac{x}{x-1}$. Πράγματι,

$$x * \frac{x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} = x + \frac{x - x^2}{x-1} = x - x = 0,$$

και λόγω μεταθετικότητας $\dfrac{x}{x-1} * x = 0$ επίσης.

Αν $x = 1$, τότε $x * y = 1 * y = 1 + y - y = 1 \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα το 1 δεν είναι αντιστρέψιμο.

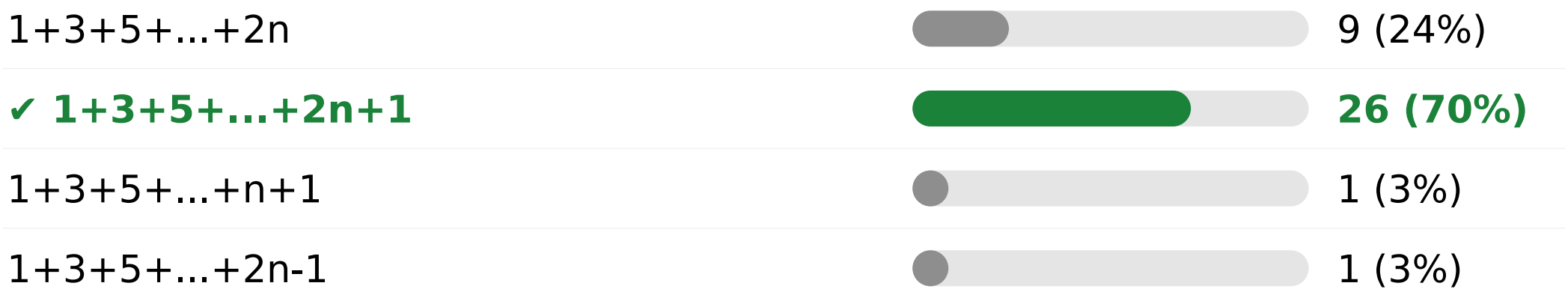
Καταλήγουμε ότι

$$\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ερώτηση 1 / 10

Έστω P(n) η πρόταση $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$. Αν η επαγωγική υπόθεση είναι ότι η P(n) ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό n, τότε στο επαγωγικό βήμα πρέπει να αποδείξετε ότι το $(n+1)^2$ είναι ίσο με:

37 συμμετέχοντες



Ερώτηση 2 / 10

Μπορείτε να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα με επαγωγή στο n;

$\Sigma_{k=1}^{n} (k-1)k = (n-1)n(n+1)/6$

34 συμμετέχοντες

Ναι.		12 (35%)
Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής.		6 (18%)
✔ Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα.		**16 (47%)**

Ερώτηση 3 / 10

Μπορείτε να αποδείξετε την παρακάτω ισότητα με επαγωγή στο n;

$$\Sigma_{k=1}^{n} (k+1)k = n(n+1)(n+2)/3$$

36 συμμετέχοντες

✔ **Ναι.**		**22 (61%)**
Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής.		3 (8%)
Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα.		11 (31%)

Ερώτηση 4 / 10

Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν η P(0) δεν ισχύει, αλλά ισχύει η P(100) και το επαγωγικό βήμα, τότε για ποια n μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ισχύει η P(n);

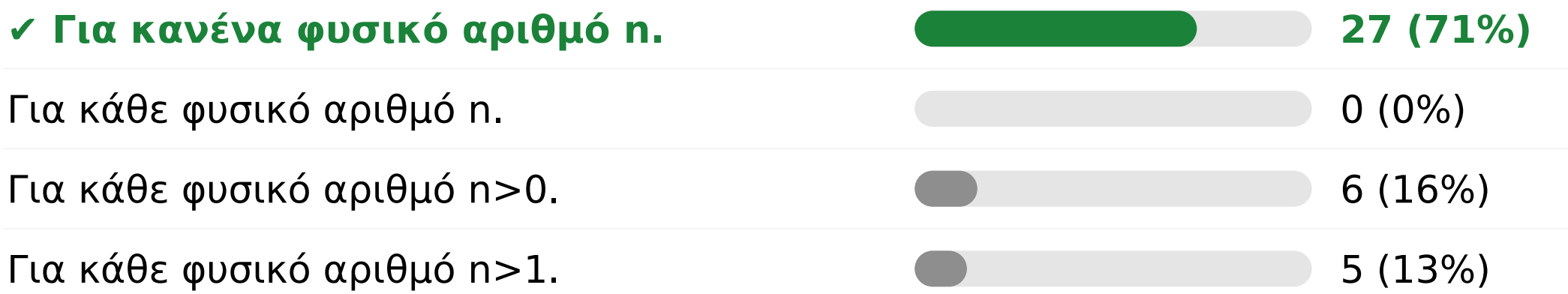
33 συμμετέχοντες

Για κανένα φυσικό αριθμό n.		0 (0%)
Για κάθε φυσικό αριθμό n.		0 (0%)
Για κάθε φυσικό αριθμό n>0.		8 (24%)
✔ Για κάθε φυσικό αριθμό n>99.		**25 (76%)**

Ερώτηση 5 / 10

Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν η P(0) δεν ισχύει, αλλά ισχύει το επαγωγικό βήμα, τότε για ποια n μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ισχύει η P(n);

38 συμμετέχοντες



Ερώτηση 6 / 10

Έστω P(n) μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Αν η P(0) και η P(100) ισχύουν, αλλά δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα, τότε για ποια n μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι ισχύει η P(n);

38 συμμετέχοντες

Για κανένα φυσικό αριθμό n.	1 (3%)
Για κάθε φυσικό αριθμό n.	0 (0%)
✔ Για n=0 και n=100.	**37 (97%)**
Για κάθε φυσικό αριθμό μέχρι το 100.	0 (0%)

Ερώτηση 7 / 10

Έστω ότι $d_0=0$, $d_1=1$ και $d_{n+1}=2d_n-d_{n-1}+2$ για $n\geq 1$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $d_n=n^2$ για κάθε $n\geq 0$. Έστω P(n): $d_n=n^2$. Μπορούμε να δείξουμε το P(n) χρησιμοποιώντας απλή επαγωγή, δηλαδή ΜΟΝΟ την υπόθεση P(n);

35 συμμετέχοντες

Ναι.	7 (20%)
Όχι, γιατί η βάση δεν ισχύει.	3 (9%)
Όχι, γιατί το P(n+1) είναι ψευδές για κάποιο n.	1 (3%)
✔ Όχι, γιατί η υπόθεση P(n) από μόνη της δεν αρκεί.	**24 (69%)**

Ερώτηση 8 / 10

Ίδια ακολουθία ($d_0=0$, $d_1=1$, $d_{n+1}=2d_n-d_{n-1}+2$ για $n\geq 1$). Μπορούμε να δείξουμε το P(n): $d_n=n^2$ χρησιμοποιώντας ισχυρή επαγωγή, και αν ναι, ποια βάση χρειάζεται;

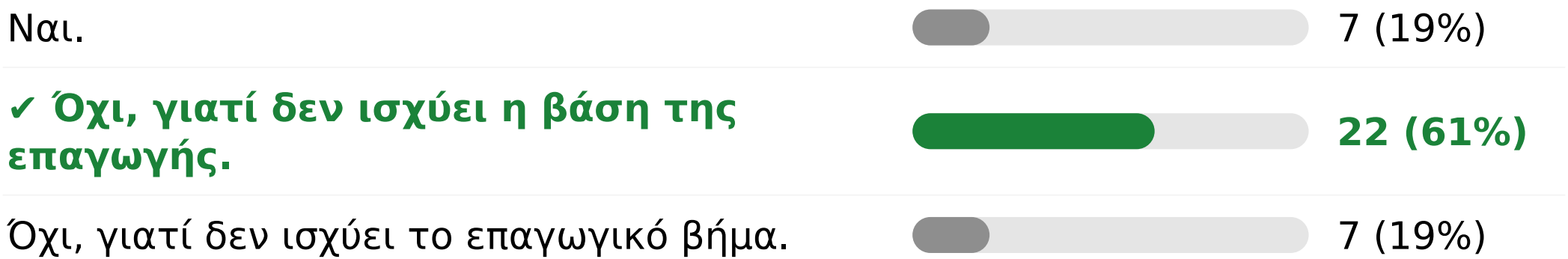
39 συμμετέχοντες

Ναι, με βάση μόνο το n=0.	5 (13%)	
✔ Ναι, με βάση τα n=0 και n=1.	**31 (79%)**	
Όχι, γιατί η βάση δεν ισχύει.	2 (5%)	
Όχι, γιατί το επαγωγικό βήμα δεν ισχύει.	1 (3%)	

Ερώτηση 9 / 10

Μπορείτε να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε περιττός αριθμός 2n+1 μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα τουλάχιστον δύο πρώτων αριθμών με επαγωγή στο n;

36 συμμετέχοντες



Ερώτηση 10 / 10

Μπορείτε να αποδείξετε ότι οποιοσδήποτε άρτιος αριθμός 2n μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα τουλάχιστον δύο πρώτων αριθμών με επαγωγή στο n;

39 συμμετέχοντες

✔ **Ναι.**		**21 (54%)**
Όχι, γιατί δεν ισχύει η βάση της επαγωγής.		5 (13%)
Όχι, γιατί δεν ισχύει το επαγωγικό βήμα.		13 (33%)