Les algèbres de Yokonuma-Hecke et le polynôme HOMFLYPT

Maria Chlouveraki

Université de Versailles - St Quentin

L'algèbre de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}_n(q)$

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'algèbre de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}_n(q)$ de type A est la $\mathbb{C}$-algèbre associative avec une présentation donnée par des générateurs $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$, et relations :

$$\begin{array}{clcll}
(\mathrm{b}_1) & G_i G_j & = & G_j G_i & \text{pour } |i-j| > 1\,; \\
(\mathrm{b}_2) & G_{i+1} G_i G_{i+1} & = & G_i G_{i+1} G_i & \text{pour tout } i\,; \\
(\mathrm{h}) & G_i^2 & = & (q-1)G_i + q & \text{pour tout } i\,.
\end{array}$$

Soit s_i la transposition $(i, i+1)$. Si $w \in \mathfrak{S}_n$ et $w = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_r}$ est une expression réduite, on pose $G_w := G_{i_1} G_{i_2} \ldots G_{i_r}$. L'ensemble $\{G_w \mid w \in \mathfrak{S}_n\}$ est la $\mathbb{C}$-base "canonique" de $\mathcal{H}_n(q)$. L'ensemble suivant est une autre $\mathbb{C}$-base pour $\mathcal{H}_n(q)$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{(G_{i_1} \ldots G_{i_1 - r_1})(G_{i_2} \ldots G_{i_2 - r_2}) \cdots (G_{i_p} \ldots G_{i_p - r_p}) \,|\, 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n-1\}.$$

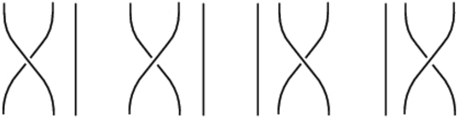
On remarque que les générateurs G_i sont inversibles dans $\mathcal{H}_n(q)$, avec

$$G_i^{-1} \quad = \quad q^{-1} G_i + (q^{-1} - 1) \qquad \text{pour tout } i\,.$$

Le groupe de tresses B_n

Les relations (b_1) et (b_2) sont les relations qui définissent le groupe de tresses classique B_n de type A.

$$B_n = \langle\, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \,|\, \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ pour } |i-j| > 1 \,\rangle$$



σ_1 σ_1^{-1} σ_2 σ_2^{-1}

La clôture d'une tresse α avec des arcs simples donne naissance à un noeud ou un entrelac orienté $\widehat{\alpha}$ et, par le théorème de Markov, les types de noeuds ou entrelacs orientés sont en bijection avec les classes d'équivalence de tresses dans $\cup_n B_n$ modulo les mouvements :

(i) Conjugaison dans B_n : $\alpha\beta \sim \beta\alpha$;

(ii) Stabilisation positive et négative : $\alpha \sim \alpha{\sigma_n}^{\pm 1},\ \alpha \in B_n$.

La Trace de Ocneanu τ

Théorème (Jones)

Soit $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une indéterminée. Il existe une unique trace de Markov linéaire

$$\tau : \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow \mathbb{C}[\zeta]$$

définie par induction sur $\mathcal{H}_n(q)$, pour tout n, par les conditions suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \tau(hh') & = & \tau(h'h) & \\ \tau(1) & = & 1 & \\ \tau(hG_n) & = & \zeta\,\tau(h) & \text{(propriété de Markov)} \end{array}$$

où $h, h' \in \mathcal{H}_n(q)$.

La trace τ est la *trace de Ocneanu* de paramètre ζ. Elle est uniquement déterminée par ses valeurs sur les éléments de la forme

$$G_{i_k} \ldots G_{i_2} G_{i_1} \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n-1.$$

Le polynôme HOMFLYPT

On pose

$$\lambda_{\mathcal{H}} := \frac{\zeta + (1-q)}{q\zeta} \quad \text{et} \quad D_{\mathcal{H}} := \frac{1}{\zeta\sqrt{\lambda_{\mathcal{H}}}}.$$

Définition (Jones)

On définit une fonction P sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des classes d'isotopie d'entrelacs orientés, en définissant P sur la clôture $\widehat{\alpha}$ d'une tresse $\alpha \in B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$P(\widehat{\alpha}) := (D_{\mathcal{H}})^{n-1} (\sqrt{\lambda_{\mathcal{H}}})^{\epsilon(\alpha)} \, (\tau \circ \pi) \, (\alpha)$$

où $\pi : \mathbb{C}B_n \longrightarrow \mathcal{H}_n(q)$ est l'épimorphisme d'algèbres naturel qui envoie le générateur σ_i à G_i, et $\epsilon(\alpha)$ est la somme des puissances des générateurs σ_i dans l'expression de α.

La fonction P est bien-définie sur $\mathcal{L}$ et elle est connue comme le polynôme *de Jones à 2 variables* ou *HOMFLYPT*, un invariant de noeuds et entrelacs classiques.

L'algèbre de Yokonuma-Hecke $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. L'algèbre de Yokonuma-Hecke $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre associative engendrée par les éléments

$$g_1, \ldots, g_{n-1}, t_1, \ldots, t_n$$

satisfaisant les relations suivantes :

$$\begin{array}{lrcll} (\mathrm{b}_1) & g_i g_j & = & g_j g_i & \text{pour } |i-j| > 1 \\ (\mathrm{b}_2) & g_i g_j g_i & = & g_j g_i g_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ (\mathrm{f}_1) & t_i t_j & = & t_j t_i & \text{pour tout } i, j \\ (\mathrm{f}_2) & t_j g_i & = & g_i t_{s_i(j)} & \text{pour tout } i, j \\ (\mathrm{f}_3) & t_j^d & = & 1 & \text{pour tout } j \end{array} \tag{1}$$

où s_i est la transposition $(i, i+1)$, et les relations quadratiques :

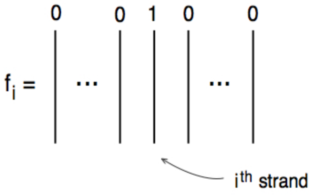
$$g_i^2 = 1 + (u-1)\, e_i + (u-1)\, e_i\, g_i \qquad \text{pour tout } i \tag{2}$$

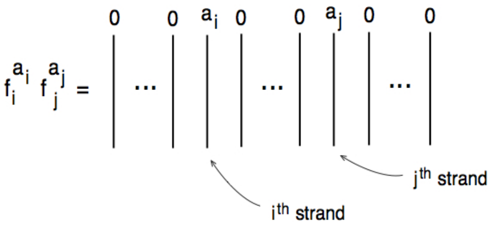
où

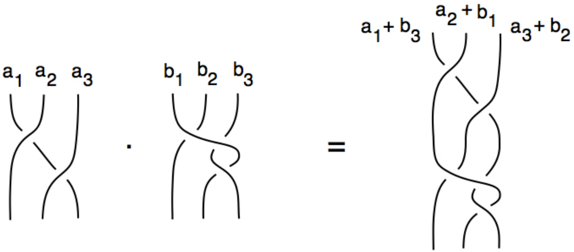
$$e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{-s}.$$

Le groupe de tresses à poids (modulaire)

Les relations (b_1), (b_2), (f_1) et (f_2) sont les relations qui définissent le groupe de tresses à poids classique $\mathcal{F}_n \cong \mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, où les t_j's sont interprétés comme des "poids élémentaires" (poids 1 sur la $j^{\text{ème}}$ tresse). Les relations $t_j^d = 1$ impliquent que le poids de chaque tresse est considéré modulo d. Donc, l'algèbre $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ est obtenue naturellement comme le quotient de l'algèbre du groupe de tresses à poids par les relations modulaires (f_3) et les relations quadratiques (2). De plus, les relations (1) sont les relations qui définissent le groupe de tresses à poids modulaire $\mathcal{F}_{d,n} \cong (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n$, donc l'algèbre $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ peut être aussi obtenue comme le quotient de l'algèbre du groupe de tresses à poids modulaire par les relations quadratiques (2).







$$e_1 = \frac{1}{d}\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \Big| & \Big| & \Big| \end{array} + \begin{array}{ccc} 1 & d-1 & 0 \\ \Big| & \Big| & \Big| \end{array} + \begin{array}{ccc} 1 & d-2 & 0 \\ \Big| & \Big| & \Big| \end{array} + \cdots + \begin{array}{ccc} d-1 & 1 & 0 \\ \Big| & \Big| & \Big| \end{array} \right)$$

On peut vérifier facilement que les éléments e_i sont des idempotents de $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$. De plus, les éléments g_i sont inversibles, avec

$$g_i^{-1} = g_i + (u^{-1} - 1)\, e_i + (u^{-1} - 1)\, e_i\, g_i.$$

La propriété de décomposition de l'algèbre de Yokonuma-Hecke

Grâce aux relations $(1)(\mathrm{f}_1)$ et $(1)(\mathrm{f}_2)$, tout monôme w dans $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ peut être écrit de la forme

$$w = t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n} \cdot \sigma$$

où $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et σ est un mot en $g_1, \ldots, g_{n-1}$. Donc, w se décompose en 'partie de poids' $t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}$ et 'partie de tresse' σ. En appliquant les relations de tresses $(1)(\mathrm{b}_1)$ et $(1)(\mathrm{b}_2)$ et les relations quadratiques (2), on déduit que l'ensemble suivant est une $\mathbb{C}$-base pour $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Y}} = \left\{ t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n} (g_{i_1} \ldots g_{i_1 - r_1}) \cdots (g_{i_p} \ldots g_{i_p - r_p}) \;\middle|\; \begin{array}{l} k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n-1 \end{array} \right\}$$

Une base inductive de l'algèbre de Yokonuma-Hecke

Tout élément de $\mathrm{Y}_{d,n+1}(u)$ est uniquement écrit comme combinaison linéaire de mots de types suivants :

$$w_n g_n g_{n-1} \ldots g_i t_i^k \qquad \text{ou} \qquad w_n t_{n+1}^k \qquad (k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$$

où $w_n \in \mathrm{Y}_{d,n}(u)$.

La trace de Juyumaya tr

Théorème (Juyumaya)

Soient z, $x_1, \ldots, x_{d-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ des indéterminées. Il existe une unique trace de Markov linéaire

$$\mathrm{tr} : \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{Y}_{d,n}(u) \longrightarrow \mathbb{C}[z, x_1, \ldots, x_{d-1}]$$

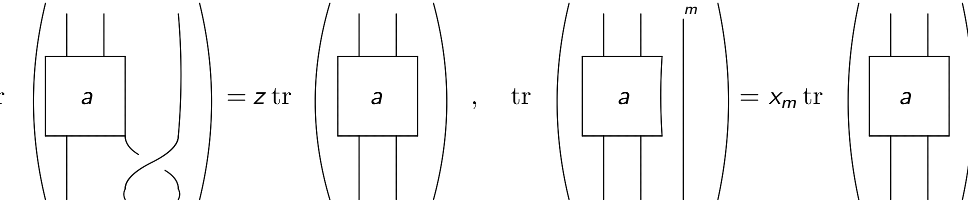
définie par induction sur $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$, pour tout n, par les conditions suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{tr}(ab) & = & \mathrm{tr}(ba) & \\ \mathrm{tr}(1) & = & 1 & \\ \mathrm{tr}(ag_n) & = & z\,\mathrm{tr}(a) & \text{(propriété de Markov)} \\ \mathrm{tr}(at_{n+1}^m) & = & x_m \mathrm{tr}(a) & (m = 1, \ldots, d-1) \end{array}$$

où $a, b \in \mathrm{Y}_{d,n}(u)$.

La trace tr s'appelle la *trace de Juyumaya* de paramètres $z, x_1, \ldots, x_{d-1}$.

Le dessin suivant donnes les interprétations topologiques de deux dernières conditions.



Selon les conditions de la trace, pour tout i, on a

$$\mathrm{tr}(e_i) = \frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} =: E \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(e_i g_i) = \mathrm{tr}(g_i) = z.$$

On obtient :

$$\mathrm{tr}(g_i^2) = 1 + (u-1)E + (u-1)z.$$

Le E-système

La trace de Juyumaya tr ne se normalise pas directement (étant la seule trace de Markov avec cette propriété). En fait, pour $\alpha \in \mathrm{Y}_{d,n}(u)$, on calcule :

$$\mathrm{tr}(\alpha g_n^{-1}) = \mathrm{tr}(\alpha g_n) + (u^{-1} - 1)\mathrm{tr}(\alpha e_n) + (u^{-1} - 1)\mathrm{tr}(\alpha e_n g_n).$$

Maintenant, alors que

$$\mathrm{tr}(\alpha e_n g_n) = \mathrm{tr}(\alpha g_n) = z\,\mathrm{tr}(\alpha) = \mathrm{tr}(\alpha)\mathrm{tr}(g_n),$$

on a que $\mathrm{tr}(\alpha e_n)$ ne se factorise pas via $\mathrm{tr}(\alpha)$, i.e.,

$$\mathrm{tr}(\alpha e_n) \neq \mathrm{tr}(\alpha)\mathrm{tr}(e_n),$$

ce qui implique que $\mathrm{tr}(\alpha g_n^{-1})$ ne se factorise pas via $\mathrm{tr}(\alpha)$, i.e.,

$$\mathrm{tr}(\alpha g_n^{-1}) \neq \mathrm{tr}(\alpha)\mathrm{tr}(g_n^{-1}).$$

En forçant $\mathrm{tr}(\alpha e_n) = \mathrm{tr}(\alpha)\mathrm{tr}(e_n)$ on obtient que les paramètres $x_1, \ldots, x_{d-1}$ doivent satisfaire le E-*système*, un système d'équations non-linéaires de la forme :

$$\sum_{s=0}^{d-1} x_{m+s}x_{d-s} = x_m \sum_{s=0}^{d-1} x_s x_{d-s} \qquad (1 \leqslant m \leqslant d-1)$$

où les sous-indices de x_j's sont considérés modulo d et $x_0 := 1$.

Gérardin a montré que les solutions du E-système sont paramétrées par les sous-ensembles non-vides de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Soit $X_S = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{d-1}\}$ une solution du E-système paramétrée par le sous-ensemble non-vide S de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On a

$$E = \mathrm{tr}\,(e_i) = \frac{1}{d}\sum_{s=0}^{d-1} \mathrm{x}_s \mathrm{x}_{d-s} = \frac{1}{|S|} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

De plus,

$$\mathrm{tr}(\alpha e_n) \stackrel{\mathrm{E}}{=} \mathrm{tr}(\alpha)\,\mathrm{tr}(e_n) = E\,\mathrm{tr}(\alpha) \qquad (\alpha \in \mathrm{Y}_{d,n}(u)). \tag{3}$$

Le cas $E = 1$

Les solutions 'triviales' du E-système sont celles qui sont paramétrées par les sous-ensembles de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ à un élément. Si S est un singleton, alors $E = \mathrm{tr}\,(e_i) = 1$. Dans ce cas, Gérardin a montré que x_1 est une $d^{\text{ème}}$ racine de l'unité et $\mathrm{x}_m = \mathrm{x}_1^m$ $(1 \leqslant m \leqslant d-1)$. On remarque que, dans ce cas,

$$\mathrm{x}_{k+l} = \mathrm{x}_1^{k+l} = \mathrm{x}_1^k \mathrm{x}_1^l = \mathrm{x}_k \mathrm{x}_l \qquad (k, l \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}).$$

Ces solutions ont la propriété suivante intéressante (une version plus forte de (3)) :

Proposition (CL)

Soit X_S une solution du E-système telle que $E = 1$. On a

$$\mathrm{tr}(\beta e_j) \stackrel{\mathrm{E}}{=} \mathrm{tr}(\beta)\,\mathrm{tr}(e_j) = \mathrm{tr}(\beta) \qquad (\beta \in \mathrm{Y}_{d,n+1}(u),\ 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Les invariants Δ_S

On pose

$$\lambda_{\mathrm{Y}} := \frac{z + (1-u)E}{uz} \quad \text{et} \quad D_{\mathrm{Y}} := \frac{1}{z\sqrt{\lambda_{\mathrm{Y}}}}.$$

Définition (Juyumaya-Lambropoulou)

Soit X_S une solution du E-système paramétrée par le sous-ensemble non-vide S de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On définit une fonction Δ_S sur l'ensemble $\mathcal{L}$ des classes d'isotopie d'entrelacs orientés, en définissant Δ_S sur la clôture $\widehat{\alpha}$ d'une tresse $\alpha \in B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de la façon suivante :

$$\Delta_S(\widehat{\alpha}) := D_{\mathrm{Y}}^{n-1}(\sqrt{\lambda_{\mathrm{Y}}})^{\epsilon(\alpha)}\,(\mathrm{tr} \circ \delta)\,(\alpha)$$

où $\delta : \mathbb{C}B_n \longrightarrow \mathrm{Y}_{d,n}(u)$ est l'homomorphisme d'algèbres naturel qui envoie le générateur σ_i à g_i, et $\epsilon(\alpha)$ est la somme des puissances des générateurs σ_i dans l'expression de α.

La fonction Δ_S est bien-définie sur $\mathcal{L}$, i.e., c'est un invariant d'isotopie de noeuds et entrelacs classiques à 2 variables, u et z. On remarque que pour tout $d \in \mathbb{N}$, cette construction produit $2^d - 1$ invariants d'isotopie.

La trace de Juyumaya spécialisée

Définition

Soient $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_{d-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathbb{C}[z, x_1, \ldots, x_{d-1}] & \longrightarrow & \mathbb{C}[z] \\ & z & \mapsto & z \\ & x_m & \mapsto & \mathrm{x}_m \quad (1 \leqslant m \leqslant d-1) \end{array}$$

On dit que θ est une *spécialisation*. On appelle la composition

$$\theta \circ \mathrm{tr} : \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{Y}_{d,n}(u) \longrightarrow \mathbb{C}[z]$$

la *trace de Juyumaya spécialisée* de paramètre z.

Pour une spécialisation θ fixée, la trace de Juyumaya spécialisée de paramètre z est égale à la trace de Juyumaya de paramètres $z, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{d-1}$. Donc, pour une solution X_S du E-système, l'invariant Δ_S peut être réécrit en utilisant θ comme

$$\Delta_S(\widehat{\alpha}) = D_{\mathrm{Y}}^{n-1}(\sqrt{\lambda_{\mathrm{Y}}})^{\epsilon(\alpha)}\,(\theta \circ \mathrm{tr} \circ \delta)\,(\alpha).$$

Proposition (CL)

Soit θ une spécialisation comme ci-dessus et posons $\mathrm{x}_0 := 1$. Soit $\varphi : \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Y}_{d,n}(u) \longrightarrow \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{Y}_{d,n}(u)$ l'application linéaire définie par induction sur $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1 \\ \varphi(w_n g_n g_{n-1} \ldots g_i t_i^k) &= g_n \varphi(w_n g_{n-1} \ldots g_i t_i^k) \\ \varphi(w_n t_{n+1}^k) &= \mathrm{x}_k \varphi(w_n) \end{aligned}$$

où $w_n \in \mathrm{Y}_{d,n}(u)$ et $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On a

(a) $\mathrm{tr} \circ \varphi = \theta \circ \mathrm{tr}$, et

(b) $\varphi(\mathrm{Y}_{d,n}(u)) = W_n$, où W_n est le $\mathbb{C}$-sous-espace linéaire de $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ engendré par les éléments $g_{i_k} \ldots g_{i_2} g_{i_1}$ avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n-1$.

Pour une solution $X_S = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{d-1}\}$ du E-système, l'invariant Δ_S peut être réécrit comme

$$\Delta_S(\widehat{\alpha}) = D_{\mathrm{Y}}^{n-1} (\sqrt{\lambda_{\mathrm{Y}}})^{\epsilon(\alpha)} \left(\mathrm{tr} \circ \varphi \circ \delta\right)(\alpha).$$

De plus, l'application φ nous donne une spécialisation le plus tôt possible dans la construction de Δ_S des $x_1, \ldots, x_{d-1}$ en X_S.

Application: le cas $E = 1$

Soit $X_S = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_{d-1}\}$ une solution du E-système telle que $E = 1$, i.e., x_1 est une $d^{\text{ème}}$ racine de l'unité et $\mathrm{x}_m = \mathrm{x}_1^m$ $(1 \leqslant m \leqslant d-1)$. Dans ce cas, on peut définir l'épimorphisme d'algèbres suivant :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : \ \mathrm{Y}_{d,n}(u) & \longrightarrow & \mathcal{H}_n(u) & \\ g_i & \mapsto & G_i & \\ t_i^m & \mapsto & \mathrm{x}_m & \quad (1 \leqslant m \leqslant d-1). \end{array}$$

Considérons maintenant la trace de Ocneanu sur $\mathcal{H}_n(u)$ de paramètre $\zeta = z$. La composition $\tau \circ \gamma$ est une trace de Markov sur $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$, qui prend les mêmes valeurs que la trace de Juyumaya spécialisée sur le $\mathbb{C}$-sous-espace linéaire W_n. On en déduit que

$$\tau \circ \gamma = \theta \circ \mathrm{tr}.$$

On conclut que, dans ce cas ($q = u$ et $\zeta = z$), on a

$$P(\widehat{\alpha}) = \Delta_S(\widehat{\alpha}) \quad (\alpha \in B_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comparaison de P et Δ_S

Théorème 1 (CL)

Soit X_S une solution du E-système. Soit tr la trace de Juyumaya sur $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ de paramètres z, X_S, et soit τ la trace de Ocneanu sur $\mathcal{H}_n(q)$ de paramètre ζ. Soit $E = \mathrm{tr}(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. On a $P = \Delta_S$ si et seulement si on est dans un des cas suivants :

Cas	q	ζ	u	z	E
1	1	z	1	$\mathbb{C}^*$	$\forall$
2	1	$-z$	1	$\mathbb{C}^*$	$\forall$
3	$\mathbb{C}^*$	q	1	1	$\forall$
4	$\mathbb{C}^*$	q	1	-1	$\forall$
5	$\mathbb{C}^*$	-1	1	1	$\forall$
6	$\mathbb{C}^*$	-1	1	-1	$\forall$
7	1	E	$\mathbb{C}^*$	$-E$	$\forall$

Cas	q	ζ	u	z	E
8	1	$-E$	$\mathbb{C}^*$	$-E$	$\forall$
9	$\mathbb{C}^*$	q	$\mathbb{C}^*$	-1	1
10	$\mathbb{C}^*$	q	$\mathbb{C}^*$	u	1
11	$\mathbb{C}^*$	-1	$\mathbb{C}^*$	-1	1
12	$\mathbb{C}^*$	-1	$\mathbb{C}^*$	u	1
13	u	z	$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^*$	1
14	$1/u$	$-z/u$	$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^*$	1

Comparaison de P et Δ_S (suite)

Théorème 2 (CL)

Soit X_S une solution du E-système. Soit tr la trace de Juyumaya sur $\mathrm{Y}_{d,n}(u)$ de paramètres z, X_S, et soit τ la trace de Ocneanu sur $\mathcal{H}_n(q)$ de paramètre ζ. Soit $E = \mathrm{tr}(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. Il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}(q, \zeta, u, z, E)$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\widehat{\alpha}) = c_n\, \Delta_S(\widehat{\alpha}) \quad (\alpha \in B_n)$$

si et seulement si $P = \Delta_S$, i.e., si et seulement si on est dans un des cas du Théorème 1.